Corrigé : contrôle de mathématique

Problème 1. Produit de Hadamard (X PC 2020 – extrait)

Rappelons à toute fin utile que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ est défini par : $\langle u \mid v\rangle = u^{\mathrm{T}}v$.

Partie I.

Question 1. $(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + b\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$ donc $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$ est symétrique, et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})u = a(u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u) + b(u^{\mathrm{T}}\mathrm{B}u) \geqslant 0$$

donc $a\mathrm{A}+b\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 2. $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = (u^{\mathrm{T}}v)(v^{\mathrm{T}}u) = \langle u \mid v\rangle\langle v \mid u\rangle = \langle u \mid v\rangle^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 3.

a) Le coefficient de rang (i,j) de $(uu^{\mathrm{T}})\odot(vv^{\mathrm{T}})$ vaut $(u_iu_j)(v_iv_j)$; celui de $(u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}$ est égal à $(u_iv_i)(u_jv_j)$ donc $(uu^{\mathrm{T}})\odot(vv^{\mathrm{T}}) = (u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\langle u_k \mid x\rangle u_k$ et $\mathrm{A}x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\langle u_k \mid x\rangle u_k$.

Par ailleurs, $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big)x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\langle u_k \mid x\rangle u_k$ donc $\mathrm{A}x = \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big)x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$. En particulier, $u_j^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle u_j \mid u_k\rangle^2 = \lambda_j$ car la base est orthonormée, donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ implique $\lambda_j \geqslant 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.

c) On note $\mu_1,\dots,\mu_p$ les valeurs propres de B, et $(v_1,\dots,v_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. Alors :

$$\mathrm{A}\odot\mathrm{B} = \Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big)\odot\Big(\sum_{j=1}^{p}\mu_j v_j v_j^{\mathrm{T}}\Big) = \sum_{i,j}\lambda_j\mu_j(u_iu_i^{\mathrm{T}})\odot(v_jv_j^{\mathrm{T}}) = \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j(u_i\odot v_j)(u_i\odot v_j)^{\mathrm{T}}$$

D'après la question 2 on a $(u_i\odot v_j)(u_i\odot v_j)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ et puisque $\lambda_i\mu_j \geqslant 0$, la question 1 permet de conclure : $\mathrm{A}\odot\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie II.

Question 4.

a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\mathrm{P}[\mathrm{A}]_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{A}_{ij}^k$ donc $\mathrm{P}[\mathrm{A}] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{A}^{(k)}$ puisque $\big[\mathrm{A}^{(k)}\big]_{ij} = \mathrm{A}_{ij}^k$.

b) La question 3c permet de prouver par récurrence sur k que $\mathrm{A}^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. D'après la question 1 on en déduit que $\mathrm{P}[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ lorsque tous les a_k sont positifs ou nuls.

Question 5.

a) $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{A}_{ij}^k}{k!}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}[\mathrm{A}]_{ij} = \exp(\mathrm{A}_{ij})$.

b) De ceci il résulte que $\exp[\mathrm{A}] = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]$.

Notons déjà que si A est symétrique, il en est de même de $\exp[\mathrm{A}]$. Par ailleurs, d'après la question 4b, $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $u^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]u \geqslant 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $u^{\mathrm{T}}\exp[\mathrm{A}]u \geqslant 0$, ce qui prouve que $\exp[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

c) D'après les questions 2 et 3c, pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $\exp[\mathrm{A}]\odot(uu^{\mathrm{T}}) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 6.

a) La symétrie du produit scalaire entraîne que la matrice A est symétrique, et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}} \mathrm{A} u = \sum_{i,j} \langle x_i \mid x_j \rangle u_i u_j = \Big\langle \sum_{i=1}^{p} u_i x_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \Big\rangle = \Big| \sum_{k=1}^{p} u_k x_k \Big|^2 \geqslant 0$$

donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

b) $(uu^{\mathrm{T}})_{ij} = u_i u_j = \exp\Big(-\dfrac{|x_i|^2 + |x_j|^2}{2}\Big)$ donc $\big(\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})\big)_{ij} = \exp\Big(\langle x_i \mid x_j \rangle - \dfrac{|x_i|^2 + |x_j|^2}{2}\Big) = \exp\Big(-\dfrac{|x_i - x_j|^2}{2}\Big)$ car $|x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 - 2\langle x_i \mid x_j \rangle + |x_j|^2$.

c) La matrice M définie par $\mathrm{M}_{ij} = \exp\Big(-\dfrac{|x_i - x_j|^2}{2}\Big)$ est donc égale à $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$. D'après la question 5.c, $\mathrm{M} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. Si on applique ce résultat aux vecteurs $\Big(\dfrac{x_i}{\sqrt{\lambda}}\Big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $\mathbb{R}^d$ on obtient que $\mathrm{K} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Problème 2. Développement en fraction continue (d'après Centrale TSI 2010)

Partie I. Étude d'une suite définie par récurrence

Question 7.

a) g est dérivable sur son ensemble de définition et $g'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$, donc si g est constante, alors $ad - bc = 0$.

Réciproquement, si $ad - bc = 0$, alors g est constante sur chacun des deux intervalles $\Big]-\infty, -\dfrac{d}{c}\Big[$ et $\Big]-\dfrac{d}{c}, +\infty\Big[$. De plus, $\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = \dfrac{a}{c}$ donc g est bien constante sur son ensemble de définition.

On suppose désormais $ad - bc \neq 0$.

b) Dans ce cas, nous avons $g(x) = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = u + \dfrac{v}{x + w}$, avec $u = \dfrac{a}{c}$, $v = \dfrac{bc - ad}{c^2}$ et $w = \dfrac{d}{c}$.

c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on en déduit que la fonction g est :

- croissante lorsque $v < 0$, c'est à dire lorsque $ad - bc > 0$;
- décroissante lorsque $v > 0$, c'est à dire lorsque $ad - bc < 0$.

Question 8.

a) La quantité $f(x)$ n'est pas définie lorsque $x = \lfloor x \rfloor$, c'est à dire lorsque $x \in \mathbb{Z}$. f est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et dans ce cas :

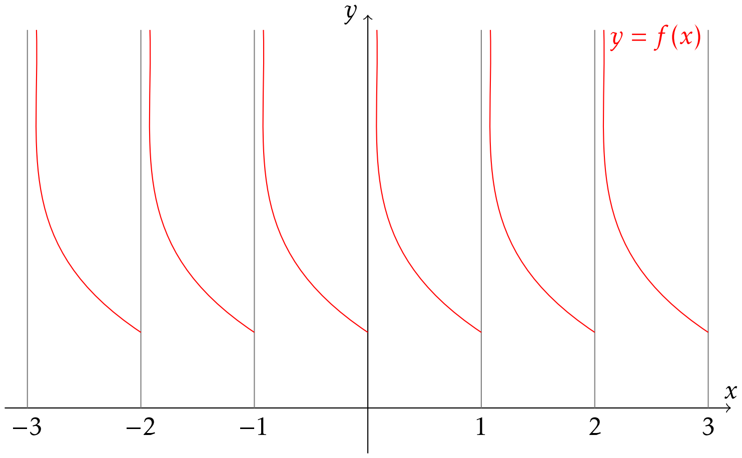
$$\lfloor x \rfloor < x < x + 1 \Longrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 < x + 1 < \lfloor x \rfloor + 2 \Longrightarrow \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

donc $f(x+1) = \dfrac{1}{x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor} = \dfrac{1}{x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1} = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = f(x)$; la fonction f est bien 1-périodique.

b) Pour tout $x \in]k, k+1[$, $\lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = \dfrac{1}{x - k} = g(x)$, en posant $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = -k$.

c) On calcule $ad - bc = -1$, donc f est décroissante sur chacun des intervalle $]k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$. On a $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to (k+1)^-} f(x) = 1$ donc son ensemble image est l'intervalle $]1, +\infty[$.

Notons pour finir que pour tout $x \in]k, k+1[$, $g'(x) = \dfrac{-1}{(x-k)^2}$, donc la dérivée à gauche en $(k+1)$ existe et vaut $g'_g(k+1) = -1$.



d) Notons k l'unique entier relatif pour lequel $x \in]k, k+1[$, et supposons $f(x)$ rationnel. Il existe donc $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{x-k} = \dfrac{p}{q}$. Mais alors $x = k + \dfrac{q}{p}$ est aussi un nombre rationnel. On en déduit par contraposée que lorsque x est irrationnel, il en est de même de $f(x)$.
Supposons maintenant x rationnel. Il existe donc deux entiers relatifs p et q tels que $x = \dfrac{p}{q}$, et alors : $f(x) = \dfrac{q}{p-kq}$ est lui aussi un nombre rationnel.

Question 9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que x_n est bien défini et irrationnel :

– lorsque $n = 0$, le résultat est acquis par hypothèse ;
– lorsque $n \geqslant 1$, on suppose x_{n-1} défini et irrationnel. En particulier, x_{n-1} n'est pas entier, donc $x_n = f(x_{n-1})$ est bien défini, et lui aussi irrationnel d'après la question 8d. La récurrence se propage.

Question 10.

a) Tout comme à la question 9, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la question 8d que x_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ un nombre rationnel.
De plus, l'étude de la fonction f effectué à la question 8 a prouvé que là où f est définie on a $f(x) > 1$, donc pour $n \geqslant 1$, $x_n = f(x_{n-1}) > 1$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$:

– lorsque $n = 0$, le résultat est acquis par hypothèse ;
– lorsque $n \geqslant 1$, on suppose $v_{n-1} > 0$ et $x_{n-1} = \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$. Nous avons alors $u_n = v_{n-1}$ et $v_n = u_{n-1} \bmod v_{n-1}$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n-1} = kv_{n-1} + v_n$, avec $0 \leqslant v_n < v_{n-1}$.
Si on avait $v_n = 0$, on aurait $x_{n-1} = k \in \mathbb{Z}$, et $x_n = f(x_{n-1})$ ne serait pas défini. On a donc $0 < v_n < v_{n-1}$.
Dans ces conditions, $x_{n-1} = k + \dfrac{v_n}{v_{n-1}}$ avec $0 < \dfrac{v_n}{v_{n-1}} < 1$, donc $\lfloor x_{n-1} \rfloor = k$ et $x_n = f(x_{n-1}) = \dfrac{1}{x_{n-1}-k} = \dfrac{v_{n-1}}{v_n} = \dfrac{u_n}{v_n}$.

c) Au cours de la question précédente, nous avons prouvé que $0 < v_n < v_{n+1}$; la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'*entiers* strictement décroissante ; elle ne peut indéfiniment garder un signe positif. Nous avons abouti à une absurdité, on en déduit que lorsque x_0 est un nombre rationnel, la quantité x_n cesse d'être définie à partir d'un certain rang.

Question 11. En conclusion, le terme x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si x_0 est un nombre irrationnel.

Partie II. Développement en fraction continue

Question 12.

```python
def dfc(x0, n):
    x = x0
    a = [floor(x0)]
    for _ in range(n):
        x = 1 / (x - floor(x))
        a.append(floor(x))
    return a
```

Question 13. Pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = f(x_{n-1}) > 1$ (comme l'a montré l'étude de la fonction f), donc $a_n = \lfloor x_n \rfloor \geqslant 1$.

Question 14.

a) $x_0 = \sqrt{2}$. Nous savons que $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

De même, $2 < \sqrt{2}+1 < 3$, donc $x_2 = f(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

On constate que $x_2 = x_1$; montrons donc par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = x_1$:

- lorsque $n = 1$, le résultat est bien évident ;
- lorsque $n \geqslant 2$, supposons $x_{n-1} = x_1$. Alors $x_n = f(x_{n-1}) = f(x_1) = x_2 = x_1$.

On vient donc de prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 1.

Nous avons donc $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2$ donc le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ est $(1,2,2,2,\ldots)$.

b) On procède de même avec $x_0 = \sqrt{3}$: nous avons $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$1 < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} < 2$ donc $x_2 = f(x_1) = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \sqrt{3}+1$. Enfin, $2 < \sqrt{3}+1 < 3$ donc $x_3 = f(x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Nous venons de constater que $x_3 = x_1$; on peut alors aisément prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $x_{2p+1} = x_1$ et $x_{2p} = x_2$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 2 à partir du rang 1.

On a donc $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, $a_{2p} = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2$ pour $p \geqslant 1$, et $a_{2p+1} = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1$ pour $p \in \mathbb{N}$. Le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$ est donc $(1,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots)$.

Question 15.

a) x_0 est irrationnel donc différent de $-\dfrac{d}{c}$ (qui lui est rationnel), ce qui prouve que $y_0 = g(x_0)$ est bien défini. En outre, $y_0 = g(x_0) = a + \dfrac{1}{x_0+d} \iff x_0 = \dfrac{1}{y_0-a} - d$, et cette égalité prouve à l'évidence que si y_0 était rationnel il en serait de même de x_0.

b) on a $x_0 > 0$ et $d \geqslant 1$ (car d est un entier naturel non nul) donc $0 < \dfrac{1}{x_0+d} < 1$.

Et puisque a est un entier, $y_0 = a + \dfrac{1}{x_0+d} \Longrightarrow \lfloor y_0 \rfloor = a$; ainsi $y_1 = \dfrac{1}{y_0 - \lfloor y_0 \rfloor} = x_0 + d$.

d est un entier naturel, donc $\lfloor y_1 \rfloor = d + \lfloor x_0 \rfloor$ et ainsi $y_2 = \dfrac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor} = x_1$. Sachant que les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence $x_n = f(x_{n-1})$ et $y_{n+1} = f(y_n)$, il est maintenant facile de prouver par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $y_n = x_{n-1}$, et par suite, $a_{n-1} = \lfloor x_{n-1} \rfloor = \lfloor y_n \rfloor = b_n$.

Question 16.

a) S'il existait un entier positif m vérifiant : $(a+d)^2 + 4 = m^2$, on aurait $4 = (m-a-d)(m+a+d)$ et par suite, sachant que $m-a-d$ et $m+a+d$ sont des entiers et que $m-a-d < m+a+d$ on devrait avoir :

$$\begin{cases} m-a-d = 1 \\ m+a+d = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ a+d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ce qui est manifestement absurde s'agissant d'entiers. Δ n'est donc pas le carré d'un entier, et $\sqrt{\Delta}$ est donc un irrationnel.

b) Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = (d-a)^2 + 4(ad+1) = (a+d)^2 + 4$ et ses deux racines sont $z_0 = \dfrac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $z_0' = \dfrac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2}$. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, donc ces deux racines sont irrationnelles.

Enfin, ces deux racines sont de signes opposés car $z_0 z_0' = -ad - 1 < 0$, donc seule z_0 (la plus grande des deux) est positive.

c) On calcule $g(z_0) = a + \dfrac{1}{z_0+d} = a + \dfrac{2}{a+d+\sqrt{\Delta}} = a + \dfrac{2(a+d-\sqrt{\Delta})}{(a+d)^2 - \Delta} = a - \dfrac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2} = z_0$, et d'après la question 14 on en déduit : $\forall n \geqslant 2$, $a_{n-1} = a_n$. Le développement en fraction continue de z_0 est donc stationnaire à partir du rang 1.

Question 17. Lorsqu'on pose $a = d = 2$ on obtient $z_0 = \sqrt{p^2+1}$, donc d'après la question précédente le développement en fraction continue de ce nombre réel est stationnaire à partir du rang 1. C'est le cas par exemple de $\sqrt{2}$, lorsqu'on pose $p = 1$.

Partie III. Convergence du développement en fraction continue

Question 18.

a) Montrons par récurrence sur n que $q_n \geqslant 1$:

- lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, nous avons $q_0 \geqslant 1$ et $q_1 = a_1 \geqslant 1$ d'après la question 13 ;
- lorsque $n \geqslant 2$, on suppose $q_{n-1} \geqslant 1$ et $q_{n-2} \geqslant 1$. Alors $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant a_n + 1 \geqslant 1$.

Prouvons alors, toujours par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$ on a $q_n > q_{n-1}$:

- lorsque $n = 2$, $q_2 = a_2 a_1 + 1 \geqslant a_1 + 1 > a_1 = q_1$ (car $a_2 \geqslant 1$ d'après la question 13).
- lorsque $n \geqslant 3$, supposons $q_{n-1} > q_{n-2}$. Alors $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > a_n q_{n-1} \geqslant q_{n-1}$ (car $q_{n-2} \geqslant 1$ et $a_n \geqslant 1$).

La suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'entiers strictement croissante ; or une suite d'entiers ne peut converger que si elle est stationnaire, donc $(q_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

b) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$:

- si $n = 1$, on a $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors :

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} - q_{n-2}) = p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

c) Notons déjà que $x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$, donc $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$.

En particulier, $x_0 = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \dfrac{x_2}{a_1 x_2 + 1} = \dfrac{(a_0 a_1 + 1) x_2 + a_0}{a_1 x_2 + 1} = \dfrac{p_1 x_2 + p_0}{q_1 x_2 + q_0}$.

Prouvons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$:

- lorsque $n = 0$, nous venons de le prouver ;
- lorsque $n > 1$, supposons $x_0 = \dfrac{p_{n-1} + p_n x_{n+1}}{q_{n-1} + q_n x_{n+1}}$. Alors :

$$x_0 = \frac{p_{n-1} + p_n(a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}})}{q_{n-1} + q_n(a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}})} = \frac{(p_{n-1} + p_n a_{n+1}) x_{n+2} + p_n}{(q_{n-1} + q_n a_{n+1}) x_{n+2} + q_n} = \frac{p_{n+1} x_{n+2} + p_n}{q_{n+1} x_{n+2} + q_n},$$

  le résultat est donc bien vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 19.

a) Pour tout $n \geqslant 1$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ d'après la question 18b.

b) On en déduit que $|r_{2p} - r_{2p+1}| = \dfrac{1}{q_{2p} q_{2p+1}}$, et sachant que $\lim q_n = +\infty$, on a : $\lim |r_{2p} - r_{2p+1}| = 0$.

On calcule ensuite $r_{2p+2} - r_{2p} = (r_{2p+2} - r_{2p+1}) + (r_{2p+1} - r_{2p}) = \dfrac{-1}{q_{2p+2} q_{2p+1}} + \dfrac{1}{q_{2p+1} q_{2p}} = \dfrac{1}{q_{2p+1}}\Big(\dfrac{1}{q_{2p}} - \dfrac{1}{q_{2p+2}}\Big) > 0$ car $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

Et enfin : $r_{2p+1} - r_{2p-1} = (r_{2p+1} - r_{2p}) + (r_{2p} - r_{2p-1}) = \dfrac{1}{q_{2p+1} q_{2p}} - \dfrac{1}{q_{2p} q_{2p-1}} = \dfrac{1}{q_{2p}}\Big(\dfrac{1}{q_{2p+1}} - \dfrac{1}{q_{2p-1}}\Big) < 0$ pour les mêmes raisons.

Ainsi, la suite (r_{2p}) est croissante, la suite (r_{2p+1}) décroissante, et l'écart entre ces deux suites tend vers 0, donc il s'agit de deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune ℓ, qui se trouve par voie de conséquence être aussi la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 20.

a) Avec les notations de la première partie, $ad-bc = p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, donc la fonction g est croissante lorsque n est pair, et décroissante lorsque n est impair.

b) La question 18c a prouvé que $x_0 = g(x_{n+2})$, et $g(a_{n+2}) = \dfrac{p_n + p_{n+1}a_{n+2}}{q_n + q_{n+1}a_{n+2}} = \dfrac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = r_{n+2}$. Traitons alors deux cas :

– lorsque n est pair, g est croissante et $a_{n+2} = \lfloor x_{n+2} \rfloor < x_{n+2}$, donc $g(a_{n+2}) \leqslant g(x_{n+2})$, soit : $r_{n+2} \leqslant x_0$.

– lorsque n est impair, g est décroissante et $a_{n+2} = \lfloor x_{n+2} \rfloor < x_{n+2}$, donc $g(a_{n+2}) \geqslant g(x_{n+2})$, soit : $r_{n+2} \geqslant x_0$.

Ceci prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $r_{2p} \leqslant x_0 \leqslant r_{2p+1}$ (la formule est aussi vraie pour $p = 0$ puisque $r_0 = a_0 < x_0 < a_0 + 1 = r_1$). En passant à la limite, on obtient : $\ell \leqslant x_0 \leqslant \ell$, autrement dit : la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

Remarque finale. On peut obtenir l'expression suivante de r_n en fonction de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Autrement dit, nous venons de prouver que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le développement en fraction continue d'un irrationnel x_0, alors :

$$x_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Cette dernière expression, que l'on doit comprendre comme une limite, est appelée une *fraction continue*. Par exemple, (voir la question 14)

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

L'un des intérêts de cette notion est que d'une certaine manière (qu'on ne détaillera pas), les éléments de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les « meilleures » approximations rationnelles du réel x_0, mais les applications mathématiques des fractions continues couvrent de nombreux autres domaines. Le lecteur curieux pourra lire la page wikipedia consacrée à cette notion :
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_continue`