Corrigé : fonctions quasi-analytiques (Centrale PC 2011 - extrait)

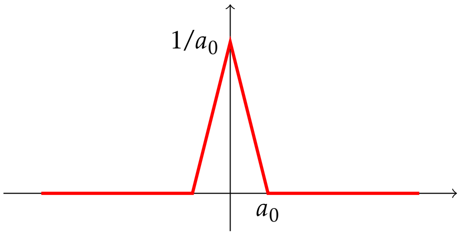
I Un élément de $\mathcal{W}$

I. A – *Une fonction affine par morceaux*

I. A. 1) Pour tout $x \leqslant -a_0$, $f_0(x) = \dfrac{1}{2a_0^2}\Big(-(x+a_0)-(x-a_0)+2x\Big) = 0$; pour tout $x \geqslant a_0$, $f_0(x) = \dfrac{1}{2a_0^2}\Big((x+a_0)+(x-a_0)+2x\Big) = 0$.
La fonction f_0 est bien nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$. Elle est affine par morceaux sur $[-a_0, a_0]$, avec :

- pour tout $x \in [-a_0, 0]$, $f_0(x) = \dfrac{1}{2a_0^2}\Big((x+a_0)-(x-a_0)+2x\Big) = \dfrac{x+a_0}{a_0^2}$;
- pour tout $x \in [0, a_0]$, $f_0(x) = \dfrac{1}{2a_0^2}\Big((x+a_0)-(x-a_0)-2x\Big) = \dfrac{a_0-x}{a_0^2}$.

La fonction $x \mapsto |x|$ étant continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f_0, composée de fonctions continues.



I. A. 2)

a) Compte tenu des variations observées à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f_0(x) \leqslant f_0(0) = \dfrac{1}{a_0}$.

b) Soit $x < y$ dans $\mathbb{R}$. La quantité $\dfrac{f_0(y)-f_0(x)}{y-x}$ est la pente de la droite reliant les points de coordonnées $\big(x, f_0(x)\big)$ et $\big(y, f_0(y)\big)$. Elle est maximale lorsque $-a_0 \leqslant x < y \leqslant 0$ et vaut dans ce cas $\dfrac{1}{a_0^2}$, et minimale lorsque $0 \leqslant x < y \leqslant a_0$ et vaut dans ce cas $-\dfrac{1}{a_0^2}$. On a donc pour tout $x < y$ dans $\mathbb{R}$: $\left|\dfrac{f_0(y)-f_0(x)}{y-x}\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0^2}$ donc f_0 est k-lipschitzienne, avec $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

I. B – *La première étape*

I. B. 1) f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_0(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Par composition la fonction f_1 est aussi de classe $\mathscr{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{2a_1}\big(f_0(x+a_1)-f_0(x-a_1)\big)$.

I. B. 2) Pour $x \leqslant -a_0-a_1$ on a $x+a_1 \leqslant -a_0$ donc pour tout $t \in [x-a_1, x+a_1]$, $f_0(t) = 0$, ce qui implique $f_1(x) = 0$.
Pour $x \geqslant a_0+a_1$ on a $x-a_1 \geqslant a_0$ donc pour tout $t \in [x-a_1, x+a_1]$, $f_0(t) = 0$, ce qui implique $f_1(x) = 0$. f_1 est bien nulle en dehors de $[-a_0-a_1, a_0+a_1]$.

I. B. 3) D'après la question I. A. 2)a), pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\big|f_1(x)\big| \leqslant \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1}\big|f_0(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1}\frac{\mathrm{d}t}{a_0} = \frac{1}{a_0} \quad \text{et} \quad \big|f_1'(x)\big| \leqslant \frac{1}{2a_1}\Big(\big|f_0(x+a_1)\big|+\big|f_0(x-a_1)\big|\Big) \leqslant \frac{1}{2a_1}\Big(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_0}\Big) = \frac{1}{a_0a_1}$$

I. B. 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|f_1'(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2a_1}\big|f_0(x+a_1)-f_0(x-a_1)\big| \leqslant k$ car f_0 est k-lischitzienne, donc d'après l'inégalité des accroissements finis f_1 est elle aussi k-lipschitzienne.

I. C – *Une suite de fonctions*

I. C. 1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que f_n est de classe $\mathscr{C}^n$:

- c'est vrai pour $n = 1$ d'après la question I. B. 1) ;
- si $n > 1$, supposons la fonction f_{n-1} de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Cette fonction est *a fortiori* continue donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $f_n'(x) = \dfrac{1}{2a_n}\big(f_{n-1}(x+a_n)-f_{n-1}(x-a_n)\big)$. Par composition de fonctions on en déduit que f_n' est aussi de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, et donc que f_n est de classe $\mathscr{C}^n$. La récurrence se propage.

I. C. 2) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que f_n est nulle en dehors que $\left[-\sum_{i=0}^{n} a_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\right]$:

- si $n=1$ c'est vrai d'après la question I. B. 2);
- si $n>1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Si $x\leqslant -\sum_{i=0}^{n} a_i$ on a $x+a_n\leqslant -\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ donc par hypothèse de récurrence la fonction f_{n-1} est nulle sur $[x-a_1, x+a_1]$, ce qui implique $f_n(x)=0$.

  De même, si $x\geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i$ on a $x-a_n\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ donc par hypothèse de récurrence la fonction f_{n-1} est nulle sur $[x-a_1, x+a_1]$, ce qui implique là encore $f_n(x)=0$.

  La fonction f_n est bien nulle en dehors de $\left[-\sum_{i=0}^{n} a_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\right]$; la récurrence se propage.

I. C. 3) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|f_n(x)\right|\leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et que pour $p\leqslant n$, $\left|f_n^{(p)}(x)\right|\leqslant \dfrac{1}{a_0a_1\cdots a_p}$:

- c'est vrai pour $n=1$ d'après la question I. B. 3);
- si $n>1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors $\left|f_n(x)\right|\leqslant \dfrac{1}{2a_n}\displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n}\dfrac{1}{a_0}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a_0}$ et pour tout $1\leqslant p\leqslant n$,

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right|=\frac{1}{2a_n}\left|f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_1)-f_{n-1}^{(p-1)}(x-a_1)\right|\leqslant\frac{1}{2a_n}\left(\left|f_{n-1}^{(p-1)}(x+a_1)\right|+\left|f_{n-1}^{(p-1)}(x-a_1)\right|\right)\leqslant\frac{1}{2a_n}\frac{2}{a_0a_1\cdots a_{p-1}}\leqslant\frac{1}{a_0a_1\cdots a_p}$$

  car $a_n\leqslant a_p$ (la suite est supposée décroissante). La récurrence se propage.

I. C. 4) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que f_n est k-lipschitzienne :

- c'est vrai pour $n=1$ d'après la question I. B. 4);
- si $n>1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|f_n'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{2a_n}\left|f_{n-1}(x+a_n)-f_{n-1}(x-a_n)\right|$. Par hypothèse de récurrence, f_{n-1} est k-lipschitzienne donc $\left|f_n'(x)\right|\leqslant\dfrac{k}{2a_n}\left|(x+a_n)-(x-a_n)\right|=k$ et d'après l'inégalité des accroissements finis, f_n est k-lipschitzienne : la récurrence se propage.

I. C. 5) Soit $n\in\mathbb{N}$. Compte tenu de la question I. C. 2), on a $\displaystyle\int_{-S}^{S}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-s_n}^{s_n}f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $s_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i$.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\displaystyle\int_{-S}^{S}f_n(t)\,\mathrm{d}t=1$:

- si $n=0$ c'est facile à voir (c'est le calcul de l'aire d'un triangle de base $2a_0$ et de hauteur $\dfrac{1}{a_0}$);
- si $n\geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors :

$$\int_{-s_n}^{s_n}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a_n}\int_{-s_n}^{s_n}\left(\int_{x-a_n}^{x+a_n}f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a_n}\int_{-s_n}^{s_n}\left(\int_{-a_n}^{a_n}f_{n-1}(x+u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\qquad\text{(en posant } t=x+u\text{)}$$

  D'après le résultat admis, $\displaystyle\int_{-s_n}^{s_n}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n}\left(\int_{-s_n}^{s_n}f_{n-1}(x+u)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n}\left(\int_{u-s_n}^{u+s_n}f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u$ (en posant $y=x+u$).

  $a_n=s_n-s_{n-1}$ donc pour tout $u\in[-a_n,a_n]$, $u-s_n\leqslant s_{n-1}$ et $u+s_n\geqslant s_{n-1}$. Puisque f_{n-1} est nul en dehors de $[-s_{n-1},s_{n-1}]$ on a donc $\displaystyle\int_{u-s_n}^{u+s_n}f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-s_{n-1}}^{s_{n-1}}f_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y=1$ par hypothèse de récurrence et ainsi, $\displaystyle\int_{-s_n}^{s_n}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n}\mathrm{d}u=1$: la récurrence se propage.

I. D – La limite

I. D. 1)

a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k_n(x)=\dfrac{1}{2a_n}\displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n}f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t-f_{n-1}(x)=\dfrac{1}{2a_n}\displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n}\big(f_{n-1}(t)-f_{n-1}(x)\big)\mathrm{d}t$. Ainsi, puisque f_{n-1} est k-lipschitzienne,

$$\left|k_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}\left|f_{n-1}(t)-f_{n-1}(x)\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{k}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n}|t-x|\,\mathrm{d}t=\frac{k}{2a_n}\int_{-a_n}^{a_n}|u|\,\mathrm{d}u=\frac{ka_n}{2}$$

b) Ceci montre que $\|k_n\|_\infty\leqslant\dfrac{k}{2}a_n$. Or la série $\sum a_n$ converge; il en est donc de même de $\sum\|k_n\|_\infty$.

I. D. 2)

a) Par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on constate que la suite (f_n) converge simplement vers $f_0 + s$, fonction que l'on note w.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question I. C. 3) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|f_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\left|w(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

c) Soit $x < y$ dans $\mathbb{R}$. D'après la question I. C. 4) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|f_n(y) - f_n(x)\right| \leqslant k[y - x|$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\left|w(y) - w(x)\right| \leqslant k|y - x|$: la fonction w est k-lipschitzienne.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[-s_n, s_n] \subset [-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$ donc d'après la question I. C. 2) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| > \mathrm{S} \implies f_n(x) = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > \mathrm{S} \implies w(x) = 0$: la fonction w est nulle en dehors de $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$.

I. D. 3)

a) La convergence de (f_n) vers w est normale (question I. D. 1)) donc uniforme sur $\mathbb{R}$, *a fortiori* sur $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} w(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ d'après la question I. C. 5).

b) Si w était identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ on aurait $\displaystyle\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} w(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Il n'en est rien, donc w n'est pas identiquement nulle.

I. D. 4)

a) Pour tout $n \geqslant 2$, $f'_n(x) = \dfrac{1}{2a_n}\Big(f_{n-1}(x + a_n) - f_{n-1}(x - a_n)\Big) = \dfrac{1}{2a_n} \displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} f'_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$$k'_n(x) = f'_n(x) - f'_{n-1}(x) = \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} \Big(f'_{n-1}(t) - f'_{n-1}(x)\Big)\,\mathrm{d}t$$

D'après la question I. C. 3) on a $\left|f''_{n-1}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 a_2}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis la fonction f'_{n-1} est lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{a_0 a_1 a_2}$. On en déduit que $\left|k'_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2a_n} \displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} \frac{|t - x|}{a_0 a_1 a_2}\,\mathrm{d}t = \frac{a_n}{2(a_0 a_1 a_2)}$.

On a montré que $\|k'_n\|_\infty = \mathrm{O}(a_n)$ et la série $\sum a_n$ converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} k'_n = \sum_{n\geqslant 2}\Big(f'_n - f'_{n-1}\Big)$ converge normalement.

b) On a $w = f_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n - f_{n-1}) = f_1 + \sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1})$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, les fonctions $f_n - f_{n-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, la série $\sum(f_n - f_{n-1})$ converge simplement et la série des dérivées $\sum(f'_n - f'_{n-1})$ converge normalement donc uniformément. On peut donc affirmer que la fonction $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après la question précédente, w est la somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = f'_1(x) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(f'_n(x) - f'_{n-1}(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$. Or d'après la question I. C. 3) on a pour tout $n \geqslant 1$, $\left|f'_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1}$ donc par passage à la limite, $\left|w'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

I. D. 5) La démarche est sensiblement analogue à celle suivie à la question précédente.

a) Pour tout $n \geqslant p$, $k_n^{(p)}(x) = \dfrac{1}{2a_n} \displaystyle\int_{x-a_n}^{x+a_n} \Big(f_{n-1}^{(p)}(t) - f_{n-1}^{(p)}(x)\Big)\mathrm{d}x$ et $f_{n-1}^{(p)}$ est lipschitzienne de rapport $\dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_{p+1}}$ donc $\left|k_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{a_n}{2(a_0 a_1 \cdots a_{p+1})}$. Ceci prouve que $\|k_n^{(p)}\|_\infty = \mathrm{O}(a_n)$: la convergence de $\sum\Big(f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)}\Big)$ est normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$.

b) On a $w = f_p + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} (f_n - f_{n-1})$.

c) Pour tout $n \geqslant p + 1$ les fonctions $f_n - f_{n-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^p$ donc la fonction $\displaystyle\sum_{n+p+1}^{+\infty} (f_n - f_{n-1})$ est de classe $\mathscr{C}^p$, ainsi donc que w.

d) En outre, $w^{(p)}(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x)$ et en passant à la limite à la question I. C. 5) on obtient $\left|w^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

II Classes quasi-analytiques

II. A – Quelques propriétés d'une classe

II. A. 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(x)$ donc si $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n$ alors $\left|g^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}(\mathrm{B}|a|)^n \mathrm{M}_n$, ce qui montre que g appartient à $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

II. A. 2) Montrons que $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

- la fonction nulle est élément de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$;
- si $f, g \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe des constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1^n \mathrm{M}_n$ et $\left|g^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}_2 \mathrm{B}_2^n \mathrm{M}_n$ et alors $\left|(\lambda f + g)^{(n)}(x)\right| \leqslant |\lambda| \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1^n \mathrm{M}_n + \mathrm{A}_2' \mathrm{B}_2^n \mathrm{M}_n \leqslant \mathrm{AB}^n \mathrm{M}_n$ avec $\mathrm{A} = |\lambda|\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = \max(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$. On a donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$.

II. A. 3)

a) Observons déjà que l'hypothèse (3) peut aussi s'écrire : $\dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n}$. Autrement dit, la suite $\left(\dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-1}}\right)$ est croissante.

En particulier, notons que nous avons pour tout $n \geqslant p$, $\dfrac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n} \geqslant \dfrac{\mathrm{M}_{n-p+1}}{\mathrm{M}_{n-p}}$.

Or $\dfrac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_{n+1-p}} = \underbrace{\left(\dfrac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_n} \times \dfrac{\mathrm{M}_{n-p}}{\mathrm{M}_{n+1-p}}\right)}_{\geqslant 1} \times \dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}}$ donc $\dfrac{\mathrm{M}_{n+1}}{\mathrm{M}_{n+1-p}} \geqslant \dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}}$, ce qui montre que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}}\right)$ est croissante.

Une suite croissante est minorée par son premier terme donc $\dfrac{\mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_{n-p}} \geqslant \dfrac{\mathrm{M}_p}{\mathrm{M}_0} = \mathrm{M}_p$, soit encore $\mathrm{M}_p \mathrm{M}_{n-p} \leqslant \mathrm{M}_n$.

b) Considérons f et g dans $\mathcal{C}(\mathrm{M})$: il existe des constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1^n \mathrm{M}_n$ et $\left|g^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}_2 \mathrm{B}_2^n \mathrm{M}_n$. D'après la formule de Leibniz, en posant $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = \max(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2)$,

$$\left|(fg)^{(n)}(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right| \leqslant \mathrm{AB}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{M}_k \mathrm{M}_{n-k} \leqslant \mathrm{AB}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{M}_n = \mathrm{A}(2\mathrm{B})^n \mathrm{M}_n$$

donc $fg \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$.

II. B – Un exemple de classe quasi-analytique

II. B. 1) Les conditions (1) et (2) sont évidemment vérifiées par la suite U, et $\dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}} = n \leqslant n+1 = \dfrac{\mathrm{U}_{n+1}}{\mathrm{U}_n}$ donc $\mathrm{U}_n^2 \leqslant \mathrm{U}_{n-1}\mathrm{U}_{n+1}$ et U vérifie la condition (3).

II. B. 2)

a) Montrons la formule demandée par récurrence sur n :

- si $n = 0$ il s'agit de la relation $f(x) = f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ car $f(a) = 0$;
- si $n \geqslant 1$, supposons $f(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$ et réalisons une intégration par parties. On obtient

$$f(x) = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

car $f^{(n)}(a) = 0$. La récurrence se propage.

b) Pour tout $x \geqslant a$ on a donc $\left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{AB}^{n+1}(n+1)! \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{AB}^{n+1}(x-a)^{n+1}$. On procède de même pour $x \leqslant a$ pour obtenir *in fine* $\left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{AB}^{n+1}|x-a|^{n+1}$. Pour $|x-a| \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{B}}$ on a donc $\left|f(x)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{A}}{2^n}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit que $f(x) = 0$.

c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{U})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$. D'après la question précédente, f est nulle sur le segment $[-a, a]$ avec $a = \dfrac{1}{2\mathrm{B}}$. Par conséquent, on a aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(a) = 0$, ce qui implique que f est nulle sur $[0, 2a]$. En réitérant ce processus en $2a$, $3a$, etc. on prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que f est nulle sur $[(n-1)a, (n+1)a]$, donc nulle sur $\mathbb{R}_+$. On procède de même en $-a, -2a, \ldots$ pour prouver de la même manière que f est nulle sur $\mathbb{R}_-$. $\mathcal{C}(\mathrm{U})$ est quasi-analytique.

II. C –

II. C. 1) Supposons $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ quasi-analytique, et considérons $f \in \mathcal{C}(\mathrm{M}) \cap \mathcal{W}$. Par hypothèse, il existe un segment $[a,b]$ en dehors duquel f est nulle.
D'après la question II. A. 1), la fonction $g : x \mapsto f(x+b+1)$ est aussi dans $\mathcal{C}(\mathrm{M})$. Or cette fonction s'annule au voisinage de 0, et puisque $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est quasi-analytique, ceci implique que g, et donc f, est la fonction nulle.

II. D –

II. D. 1) Puisque $\mathrm{M}_0 = 1$ on a $\mathrm{M}_n = \dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$.

Supposons (i) vérifiée. On a montré à la question II. A. 3) que la suite (α_n) est décroissante donc $\mathrm{M}_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha_n^n}$ et ainsi, $\alpha_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\mathrm{M}_n}\right)^{1/n}$. Par comparaison la série $\sum \alpha_n$ est convergente.

II. D. 2) Posons $\alpha_0 = \alpha_1$. La suite (α_n) est décroissante de limite nulle et la série $\sum \alpha_n$ converge donc donc on peut appliquer la partie I, qui construit une fonction non nulle $w \in \mathcal{W}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left|w^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_p} = \dfrac{\mathrm{M}_n}{a_0}$. Cette fonction est donc élément de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ (pour $\mathrm{A} = \dfrac{1}{a_0}$ et $\mathrm{B} = 1$). Nous avons mis en évidence l'existence d'une fonction non nulle élément de $\mathcal{C}(\mathrm{M}) \cap \mathcal{W}$; d'après la question II. C. 1), $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ n'est pas quasi-analytique.