Autour de l'intégrale de Gauss (Centrale PSI 2024)

Durée : 4 heures

Notations

- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.
- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.
- Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle $\mathrm{Vect}\big(P_n,\ n\in\mathbb{N}\big)$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est à dire :

$$\mathrm{Vect}\big(P_n, n\in\mathbb{N}\big) = \left\{ g : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; \exists N\in\mathbb{N}, \exists (a_0,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^{N+1}, g = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k \right\}$$

Le sujet illustre des applications du calcul de l'intégrale de Gauss dans différents domaines.

La partie I est consacrée au calcul de cette intégrale.

La partie II est consacrée à la résolution d'une équation différentielle du second ordre à l'aide des séries entières. Elle utilise le résultat final de la partie I. Elle est totalement indépendantes des deux parties suivantes.

La partie III est consacrée à l'étude d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ et d'une suite de polynômes orthogonaux associés à cet endomorphisme. Elle est indépendante de la partie II.

La partie IV est consacrée à montrer des propriétés sur la famille de polynômes construite à la partie III. Le but est d'établir que c'est une famille totale d'un espace préhilbertien. Ce résultat est en fait un résultat général dans la théorie des espaces de Hilbert.

I Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

I. A – On définit $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,dt$.

Q 1. Étudier la monotonie de la suite (W_n).

Q 2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q 3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Q 4. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I. B – On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Q 5. Justifier l'existence de I.

Q 6. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

Q 7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin u$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}\,W_{2n+1}$$

Q 8. En déduire la valeur de I puis de J.

II Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{II.1}$$

II. A –

Q 9. Déterminer les solutions développables en série entière de II.1 sur $\mathbb{R}$.

Q 10. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S, telle que $S(0) = 1$.

II. B – On définit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(x\sin(t)\big)\,dt$.

Q 11. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q 12. Montrer que G est solution de II.1 sur $\mathbb{R}$.

Q 13. Montrer que $G = S$.

III Étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

III. A – Les polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de w.
En particulier : $H_0(x) = 1$.

Q 14. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

Q 15. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

Q 16. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.

Q 17. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n.

III. B – Un produit scalaire

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2}\,dx$ converge.

Q 18. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

Q 19. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f,g) \in E^2$ associe $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

III. C – Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

Q 20. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P' \mid H_{n-1} \rangle = \langle P \mid H_n \rangle$$

Q 21. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\langle P \mid H_n \rangle = 0$.

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\big(H_0, \dots, H_n\big)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 23. Montrer : $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)} \mid H_0 \rangle$.

Q 24. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

III. D – Étude d'un endomorphisme autoadjoint

On note u, v, w les applications définies de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$u(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'$$

Q 25. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

Par la suite, on notera u_n l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On admet que v et w sont aussi des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$, et on note Id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

Q 26. Établir : $v \circ w = u - \mathrm{Id}$ et $w \circ v = u + \mathrm{Id}$.

Q 27. En déduire : $u \circ v - v \circ u = 2v$.

Q 28. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u\big(v(P)\big) = (\lambda + 2)v(P)$.

Q 29. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, H_k est un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q 31. Établir, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$\langle P' \mid Q' \rangle = \langle u(P) \mid Q \rangle - \langle P \mid Q \rangle$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 32. Montrer que u_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 33. Justifier, d'une deuxième manière, que u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n.

Q 34. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n.

IV Une famille totale

Dans cette partie, nous conservons les notations de la partie III. L'espace E muni de son produit scalaire et la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ précédemment construite. Nous allons montrer que $\big(\mathrm{Vect}(H_n,\ n \in \mathbb{N})\big)^{\perp} = \{0\}$. On dit dans ce cas là que la famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans l'espace préhilbertien E ou encore que c'est une base hilbertienne de E.

Q 35. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, montrer que $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pourra écrire $f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} = f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}e^{-x^2/2}$.

On définit ainsi

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}\,dx$$

$\mathcal{F}$ est une application linéaire sur E, appelée la transformation de Fourier de f sur l'espace préhilbertien E. Nous admettrons pour la suite que $\mathcal{F}$ est injective sur E.

Q 36. Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p}e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}e^{-x^2}\,dx$. Déterminer la valeur de M_p.

Q 37. Soit $f \in E$. Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}\frac{(-i)^n\xi^n x^n}{n!}\,dx$$

Q 38. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de la partie, on suppose que $f \in \big(\mathrm{Vect}(H_n,\ n \in \mathbb{N})\big)^{\perp}$. Le but est de montrer que f est la fonction nulle.

Q 39. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)e^{-x^2}\,dx = 0$.

Q 40. En déduire que $\mathcal{F}(f)$ est la fonction nulle.

Q 41. Conclure.