Corrigé : autour de l'intégrale de Gauss (Centrale PSI 2024)

I Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

I. A –

Q 1. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $(\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$. Par croissance de l'intégrale on en déduit que $W_{n+1} \leqslant W_n$: la suite (W_n) est décroissante.

Q 2. Par intégration par parties on obtient :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\cos t)^{n+1}\,dt = \Big[(\sin t)(\cos t)^{n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^n\,dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1-(\cos t)^2\Big)(\cos t)^n\,dt$$
$$= (n+1)\Big(W_n - W_{n+2}\Big)$$

donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Q 3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$, auytrement dit que la suite $\Big((n+1)W_nW_{n+1}\Big)$ est constante. Sachant que $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Q 4. D'après les questions 1 et 2 on a $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ donc $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ et en passant à la limite on en déduit que $W_{n+1} \sim W_n$.
D'après la question 3 il vient alors $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, soit $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I. B –

Q 5. Au voisinage de $+\infty$ on a $e^{-x^2} \underset{+\infty}{=} O(e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, donc l'intégrale I converge.

Q 6. Considérons la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$. Alors $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.
Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée :

- soit $x \geqslant 0$. Pour tout $n \geqslant x^2$, $f_n(x) = e^{n\ln(1-x^2/n)} = e^{-x^2+o(1)}$ donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$;
- d'après l'inégalité de convexité $\ln(1-t) \leqslant -t$ on a pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x^2} = \phi(x)$.

La fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc le théorème de convergence dominée s'applique, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.

Q 7. La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin u$ est licite et conduit à $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\Big(1-(\sin u)^2\Big)^n du = \sqrt{n}W_{2n+1}$.

Q 8. D'après la question 4 on a $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ donc $\lim \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et d'après les questions 6 et 7, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant paire, l'existence de I implique celle de J, et $J = 2I = \sqrt{\pi}$.

II Autour d'une équation différentielle

II. A –

Q 9. Supposons l'existence d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ solution sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ de l'équation II.1. Alors pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0 \iff \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

soit encore : $a_1 + \sum_{n+1}^{+\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\Big)x^n = 0.$

Par unicité du développement en série entière on en déduit que $a_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.
Par récurrence on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$. Par ailleurs, on a pour tout $p \geqslant 1$, $a_{2p} = -\dfrac{a_{2p-2}}{(2p)^2}$, ce qui permet d'établir, là encore par récurrence, que $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p a_0}{(2^p p!)^2}$.

Une solution de II.1 développable en série entière, si elle existe, est donc de la forme $a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

Réciproquement, le critère de d'Alembert permet d'établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à $+\infty$, et les calculs précédents montrent que seules ces séries entières sont solutions de II.1 sur $\mathbb{R}$.

Q 10. La condition $\mathrm{S}(0) = 1$ impose la valeur $a_0 = 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{S}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

II. B –

Q 11. Posons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{\pi}\cos(x \sin t)$ et appliquons le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre :

- pour tout $t \in [0,\pi]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{\pi}(\sin t)\sin(x\sin t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{\pi}(\sin t)^2\cos(x \sin t)$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur $[0,\pi]$ car continues sur le segment $[0,\pi]$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{\pi}(\sin t)^2 = \phi(t)$.

La fonction ϕ est intégrable sur $[0,\pi]$ car continue sur ce segment donc la fonction G est continue et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{G}'(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}''(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\sin t)^2\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

Q 12. On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x\mathrm{G}''(x) + \mathrm{G}'(x) + x\mathrm{G}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(x\big(1-(\sin t)^2\big)\cos(x\sin t) - (\sin t)\sin(x\sin t)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(x(\cos t)^2\cos(x\sin t) - (\sin t)\sin(x\sin t)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[(\cos t)\sin(x \sin t)\Big]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

donc G est bien solution de II.1 sur $\mathbb{R}$.

Q 13. La fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}(\sin t)^{2p}\,\mathrm{d}t$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $f_p(t) = (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}(\sin t)^{2p}$. On a $\|f_p\|_\infty = \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$ et $\sum \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$ converge (on reconnait le développement en série entière de $\operatorname{ch} x$) donc la convergence de $\sum f_p$ est normale, donc uniforme sur $[0,\pi]$, ce qui permet d'intervertir somme et intégrale : $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(\int_0^\pi (\sin t)^{2p}\,\mathrm{d}t\right)x^{2p}$.

G est donc une solution de II.1 développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et puisque $\mathrm{G}(0) = 1$ on en déduit à l'aide de la question 10 que $\mathrm{G} = \mathrm{S}$.

Remarque. Par unicité du développement en série entière nous avons en outre montré que $\int_0^{\pi} (\sin t)^{2p}\,\mathrm{d}t = \pi \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.

III Étude d'un endomorphisme sur un espace prehilbertien

III. A – Les polynômes d'Hermite

Q 14. On calcule $w'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $w''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $w^{(3)}(x) = (-8x^2+12x)\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $\mathrm{H}_1 = 2\mathrm{X}$, $\mathrm{H}_2 = 4\mathrm{X}^2-2$, $\mathrm{H}_3 = 8\mathrm{X}^3 - 12\mathrm{X}$.

Q 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $w^{(n+1)}(x) = (-1)^n\big(\mathrm{H}'_n(x) - 2x\mathrm{H}_n(x)\big)\mathrm{e}^{-x^2}$, ce qui montre que $\mathrm{H}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{H}_n - \mathrm{H}'_n$.

Q 16. On prouve alors par récurrence sur n que H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant égal à 2^n, et de même parité que n :

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\mathrm{H}_0 = 1$;
- si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang n. Ainsi, $\mathrm{H}_n = 2^n\mathrm{X}^n + \mathrm{R}_n$ avec $\deg \mathrm{R}_n \leqslant n-1$, et $\mathrm{H}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{H}_n(\mathrm{X})$.
  Alors $\mathrm{H}_{n+1} = 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + 2\mathrm{X}\mathrm{R}_n - n2^n\mathrm{X}^{n-1} - \mathrm{R}'_n$ donc $\deg \mathrm{H}_{n+1} = n+1$ et $\mathrm{cdom}(\mathrm{H}_{n+1}) = 2^{n+1}$.
  De plus, $\mathrm{H}_{n+1}(-\mathrm{X}) = -2\mathrm{X}\mathrm{H}_n(-\mathrm{X}) - \mathrm{H}'_n(-\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{X}\mathrm{H}_n(\mathrm{X}) + (-1)^n\mathrm{H}'_n(\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{X})$ donc la récurrence se propage.

Q 17. Traité à la question précédente.

III. B – Un produit scalaire

Q 18. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
La fonction nulle est élément de E, et si $f, g \in \mathrm{E}$ alors l'inégalité $|f(x)g(x)|\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{2}\Big(f(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + g(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big)$ montre que la fonction $x \mapsto f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'égalité $\big(\lambda f(x) + g(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x^2} = \lambda^2 f(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2\lambda f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2} + g(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$ montre que la fonction $x \mapsto \big(\lambda f(x) + g(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc que $\lambda f + g \in \mathrm{E}$. E est bien un espace vectoriel réel.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n}\,\mathrm{e}^{-x^2} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ donc la fonction $x \mapsto x^n$ est élément de E, et puisque E est un espace vectoriel on en déduit que $\mathbb{R}[\mathrm{X}] \subset \mathrm{E}$.

Q 19. La question précédente a incidemment démontré que si $f, g \in \mathrm{E}$ la fonction $x \mapsto f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc que $\langle f \mid g\rangle$ est bien défini.
La symétrie de cette application est évidente, la bilinéarité résulte de la linéarité de l'intégrale. Enfin, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\langle f \mid f\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ (car f est continue), autrement si et seulement si $f = 0$.
Nous avons bien défini un produit scalaire sur E.

III. C – Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

Q 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 15, $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P} \mid 2\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1}\rangle - \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}'_{n-1}\rangle$.
On a $\langle \mathrm{P} \mid 2\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\mathrm{H}_{n-1}(x)2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-y}^{y} \mathrm{P}(x)\mathrm{H}_{n-1}(x)2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Réalisons maintenant une intégration par parties :
$\int_{-y}^{y} \mathrm{P}(x)\mathrm{H}_{n-1}(x)2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{P}(x)\mathrm{H}_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}\Big]_{-y}^{y} + \int_{-y}^{y}\Big(\mathrm{P}'(x)\mathrm{H}_{n-1}(x) + \mathrm{P}(x)\mathrm{H}'_{n-1}(x)\Big)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et en faisant tendre y vers $+\infty$ on obtient : $\langle \mathrm{P} \mid 2\mathrm{X}\mathrm{H}_{n-1}\rangle = \langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{H}_{n-1}\rangle + \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}'_{n-1}\rangle$ et ainsi, $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{H}_{n-1}\rangle$.

Q 21. On en déduit par récurrence que $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$ et donc que si $\deg \mathrm{P} < n$ alors $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = 0$.

Q 22. Si $p - n$ on a $\deg \mathrm{H}_p = p < n$ donc $\langle \mathrm{H}_p \mid \mathrm{H}_n\rangle = 0$, ce qui montre que (H_n) est une famille orthogonale. Étant en outre échelonnée en degré on en déduit que $(\mathrm{H}_0, \dots, \mathrm{H}_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Q 23. La formule établie à la question 21 montre que $\|\mathrm{H}_n\|^2 = \langle \mathrm{H}_n \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{H}_n^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$.

Q 24. Le polynôme H_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 2^n donc $H_n^{(n)} = 2^n n!$.
Ainsi, $\|H_n\|^2 = \dfrac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2^n n!$ d'après la première partie, et $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$.

III. D – Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Q 25. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$ donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et $\deg u(P) \leqslant \deg P$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

Q 26. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $v \circ w(P) = v(P') = 2XP' - P'' = u(P) - P$ donc $v \circ w = u - \mathrm{Id}$.
De même, $w \circ v(P) = w(2XP - P') = 2P + 2XP' - P'' = u(P) + P$ donc $w \circ v = u + \mathrm{Id}$.

Q 27. Ainsi, $u \circ v - v \circ u = (v \circ w + \mathrm{Id}) \circ v - v \circ (w \circ v - \mathrm{Id}) = 2v$.

Q 28. Supposons $u(P) = \lambda P$. Alors $u \circ v(P) = 2v(P) + v \circ u(P) = 2v(P) + \lambda v(P)$ donc $u\big(v(P)\big) = (\lambda + 2)v(P)$.

Q 29. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, observons que $v(H_k) = H_{k+1}$; ainsi, si H_k est valeur propre de u pour la valeur propre λ_k alors H_{k+1} est valeur propre de u pour la valeur propre $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$.
Or $u(H_0) = u(1) = 1$ donc H_0 est vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda_0 = 1$, et par récurrence on en déduit alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k est vecteur propre de u pour la valeur propre $\lambda_k = 2k + 1$.

Q 30. Des questions 22 et 29 il résulte que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n et donc que u_n est diagonalisable.

Q 31. On a $\langle u(P) \mid Q \rangle = \langle -P'' + 2XP' + P \mid Q \rangle = -\langle P'' \mid Q \rangle + \langle 2XP' \mid Q \rangle + \langle P \mid Q \rangle$, et

$$\langle 2XP' \mid Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q(x)2x\,e^{-x^2}\,dx = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y}^{y} P'(x)Q(x)2x\,e^{-x^2}\,dx$$

Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_{-y}^{y} P'(x)Q(x)2x\,e^{-x^2}\,dx = \Big[-P'(x)Q(x)e^{-x^2}\Big]_{-y}^{y} + \int_{-y}^{y} \big(P''(x)Q(x) + P'(x)Q'(x)\big)e^{-x^2}\,dx$ et par passage à la limite : $\langle 2XP' \mid Q \rangle = \langle P'' \mid Q \rangle + \langle P' \mid Q' \rangle$ et ainsi, $\langle u(P) \mid Q \rangle = \langle P' \mid Q' \rangle + \langle P \mid Q \rangle$.

Q 32. De cette égalité il résulte que $\langle u(P) \mid Q \rangle = \langle P' \mid Q' \rangle + \langle P \mid Q \rangle = \langle P \mid u(Q) \rangle$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 33. D'après le théorème spectral, u_n est donc diagonalisable dans une base orthonormée.

Q 34. Grâce aux question 22 et 24 on peut affirmer que la famille $\left(H_0, \dfrac{H_1}{\sqrt{2}}, \dots, \dfrac{H_n}{\sqrt{2^n n!}}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n.

IV Une famille totale

Q 35. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}\right| = \left(|f(x)|e^{-x^2/2}\right)e^{-x^2/2}$, et à l'instar de ce que l'on a fait à la question 18,

$$\left(|f(x)|e^{-x^2/2}\right)e^{-x^2/2} \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x)^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}\right)$$

Les fonctions $x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car $f \in E$) donc il en est de même de $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2}$.

Q 36. Par croissances comparées on a $x^{2p} e^{-x^2} \underset{\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc la fonction $x \mapsto x^{2p} e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $p \geqslant 1$, $x^{2p} e^{-x^2} = x^{2p-1} \cdot x e^{-x^2}$, ce qui conduit à l'intégration par parties :

$$\int_{-y}^{y} x^{2p} e^{-x^2} = \left[-\frac{1}{2}x^{2p-1} e^{-x^2}\right]_{-y}^{y} + \frac{2p-1}{2} \int_{-y}^{y} x^{2p-2} e^{-x^2}\,dx$$

puis, en faisant tendre y vers $+\infty$: $M_p = \dfrac{2p-1}{2} M_{p-1}$.
Ainsi, $M_p = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1)}{2^p} M_0 = \dfrac{(2p)!}{4^p p!} J = \sqrt{\pi}\dfrac{(2p)!}{4^p p!}$.

Q 37. Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{ix\xi}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et $f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x)e^{-x^2} \frac{(-i\xi)^n x^n}{n!}$.

Q 38. Posons $f_n : x \mapsto f(x)e^{-x^2}\dfrac{(-i\xi)^n x^n}{n!}$ et appliquons le théorème d'interversion somme/intégrale :
La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue (par morceaux). Chacune de ces fonctions est intégrable (car $f_n(x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$) et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^n |f(x)| e^{-x^2}\frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{|\xi|^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|f(x)|e^{-x^2/2}\right)\left(x^n e^{-x^2/2}\right)\mathrm{d}x$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{|\xi|^n}{n!}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{M}_n}|\xi|^n}{n!}\right)$

Posons $a_n = \dfrac{\sqrt{\mathrm{M}_n}|\xi|^n}{n!}$. D'après la question 36, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{|\xi|}{n+1} \sim \dfrac{|\xi|}{\sqrt{n}}$ donc $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Ainsi, la série $\sum a_n$ converge et par suite $\displaystyle\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ aussi.

Le théorème s'applique donc, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\mathscr{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\xi^n$, ce qui prouve que $\mathscr{F}(f)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q 39. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse f est orthogonale aux fonctions polynomiales $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_n$ donc à $\mathrm{Vect}(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_n) = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. f est donc en particulier orthogonale à $x \mapsto x^n$, ce qui conduit à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

Q 40. Des deux questions précédentes on déduit que $\mathscr{F}(f)$ est la fonction nulle.

Q 41. Nous avons admis que $\mathscr{F}$ est injective sur E, donc f est la fonction nulle.