Polynômes de Bernoulli

Durée : 2 heures

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On conviendra si nécessaire de confondre le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

On note Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

On notera Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I. Étude des polynômes de Bernoulli

Question 1. Vérifier que Δ_n un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$ et en déduire que $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Question 3. Déduire de la question précédente que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant les relations suivantes :

$$\Delta(B_n) = nX^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par convention on posera $B_0 = 1$. La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie s'appelle la famille des *polynômes de Bernoulli*.

Question 4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis calculer B_1, B_2 et B_3.

Question 5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

Question 6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^n = \frac{1}{n+1}\Big(B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)\Big)$ et retrouver, *à l'aide de cette formule*, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.

Partie II. Nombres de Bernoulli

Dans toute la suite du problème, on notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$ (ce sont les *nombres de Bernoulli*).

Question 7. Établir, pour $n \geqslant 1$, la relation $B_n' = nB_{n-1}$.
Indication *: poser* $C_n = \dfrac{B_n'}{n}$ *puis calculer* $\Delta(C_n)$ *ainsi que* $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 8. Par une méthode analogue, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$ et en déduire que pour tout $k \geqslant 1$, $b_{2k+1} = 0$.

Question 9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x) y^k$$

Indication *: utiliser la formule de Taylor.*

Question 10. Déduire de la question précédente les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = (n+1) X^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$$

♦ ♦
♦