Corrigé : Polynômes de Bernoulli

Partie I. Étude des polynômes de Bernoulli

Question 1. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)$ donc Δ, et *a fortiori* Δ_n sont linéaires.
De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg \Delta(P) \leqslant \deg P$ donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Δ_n est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = 0$, autrement dit $P(X+1) = P(X)$.
Supposons que P ait une racine α, réelle ou complexe. On prouve alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + k) = 0$. Autrement dit, P possède une infinité de racines et ainsi $P = 0$.
Les seuls polynômes vérifiant $\Delta(P) = 0$ sont donc le polynôme nul et les polynômes sans racine réelle ou complexe, autrement dit les polynômes constants. On a donc $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

Considérons maintenant $Q \in \mathrm{Im}(\Delta_n)$: il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Posons $P = a_n X^n + P_1$ avec $P_1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $Q = a_n(X+1)^n - a_n X^n + \Delta(P_1)$ avec $\Delta(P_1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On observe alors que $Q = a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k + \Delta(P_1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Autrement dit, nous avons prouvé que $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang, $n + 1 = \dim \mathrm{Ker}(\Delta_n) + \dim \mathrm{Im}(\Delta_n) = 1 + \dim \mathrm{Im}(\Delta_n)$ donc $\dim \mathrm{Im}(\Delta_n) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ainsi $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Question 3. $nX^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}\,\Delta_n$ donc il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $nX^{n-1} = \Delta(P)$.
Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un autre polynôme vérifiant $\Delta(Q) = nX^{n-1}$. Alors $\Delta(P - Q) = 0$ donc $P - Q \in \mathrm{Ker}\,\Delta_n$ et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = P + \lambda$. Ainsi, s'il existe, le polynôme B_n s'écrit sous la forme $B_n = P + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
La condition $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ impose alors une unique valeur pour λ, et ainsi $B_n = P - \int_0^1 P(t)\,dt$.

Question 4. Posons $B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $\Delta(B_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k\big((X+1)^k - X^k\big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} a_k \binom{k}{j} X^j$.

Le coefficient de X^{n-1} dans l'expression de $\Delta(B_n)$ est donc égal à $a_n \binom{n}{n-1} = na_n$. Or $\Delta(B_n) = nX^{n-1}$ donc $a_n = 1$. On a ainsi prouvé que $\deg B_n = n$ et que $\mathrm{cdom}(B_n) = 1$.
Posons $B_1 = X + a$. La condition $\int_0^1 B_1(t)\,dt = 0$ impose $a = -\frac{1}{2}$ donc $B_1 = X - \frac{1}{2}$.
Posons $B_2 = X^2 + aX + b$. On a $\Delta(B_2) = 2X + 1 + a$ donc $a = -1$, et la condition $\int_0^1 B_2(t)\,dt = 0$ impose $b = -\int_0^1 (t^2 - t)\,dt = \frac{1}{6}$ donc $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.
Posons $B_3 = X^3 + aX^2 + bx + c$. On calcule $\Delta(B_3) = 3X^2 + (3 + 2a)X + (1 + a + b)$ donc $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, et la condition $\int_0^1 B_3(t)\,dt = 0$ impose $c = -\int_0^1 \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\right)dt = 0$ donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.

Question 5. Pour tout $n \geqslant 2$, $\Delta(B_n) = nX^{n-1}$ donc $\Delta(B_n)(0) = 0$. Or $\Delta(B_n)(0) = B_n(1) - B_n(0)$ donc $B_n(0) = B_n(1)$.

Question 6. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $k^n = \frac{1}{n+1}\Delta(B_{n+1})(k) = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\big)$ donc par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{p} k^n = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(1)\big) = \frac{1}{n+1}\big(B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)\big).$$

En particulier, $\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{3}\big(B_3(p+1) - B_3(0)\big) = \frac{1}{3}\left((p+1)^3 - \frac{3}{2}(p+1)^2 + \frac{1}{2}(p+1)\right) = \frac{1}{3}(p+1)\left(p^2 + \frac{1}{2}p\right) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Partie II. Nombres de Bernoulli

Question 7. Notons déjà que la formule est vraie pour $n = 1$ puisque $\mathrm{B}_0 = 1$ et ${}_n = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$.
Supposons maintenant $n \geqslant 2$ et posons $\mathrm{C}_n = \dfrac{\mathrm{B}'_n}{n}$.
On a $\Delta(\mathrm{C}_n) = \dfrac{1}{n}\Big(\mathrm{B}'_n(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}'_n(\mathrm{X})\Big) = \dfrac{1}{n}\Delta(\mathrm{B}_n)' = (n-1)\mathrm{X}^{n-2}$ puisque $\Delta(\mathrm{B}_n) = n\mathrm{X}^{n-1}$.
Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{C}_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{B}'_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big(\mathrm{B}_n(1) - \mathrm{B}_n(0)\Big) = 0$ (question 5).
De par l'unicité établie à la question 3 on en déduit que $\mathrm{C}_n = \mathrm{B}_{n-1}$, autrement dit que $\mathrm{B}'_n = n\mathrm{B}_{n-1}$.

Question 8. Procédons de la même façon en posant cette fois $\mathrm{C}_n = (-1)^n\mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})$.
On calcule $\Delta(\mathrm{C}_n) = \mathrm{C}_n(\mathrm{X}+1) - \mathrm{C}_n(\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{B}_n(-\mathrm{X}) - (-1)^n\mathrm{B}_n(1-\mathrm{X}) = (-1)^{n-1}\Delta(\mathrm{B}_n)(-\mathrm{X}) = (-1)^{n-1}n(-\mathrm{X})^{n-1} = n\mathrm{X}^{n-1}$.
$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{C}_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 \mathrm{B}_n(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 \mathrm{B}_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$ (en posant $u = 1-t$) donc d'après la question 3, $\mathrm{C}_n = \mathrm{B}_n$, soit $\mathrm{B}_n(1-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{B}_n(\mathrm{X})$.
En particulier, $\mathrm{B}_n(1) = (-1)^n\mathrm{B}_n(0)$. Or pour $n \geqslant 2$ on a $\mathrm{B}_n(1) = \mathrm{B}_n(0) = b_n$ (question 5) donc pour un entier n impair supérieur ou égal à 2, $b_n = -b_n$, soit $b_n = 0$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, $b_{2k+1} = 0$.

Question 9. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et considérons le polynôme $\mathrm{B}_n(x+\mathrm{X})$. Il s'agit d'un polynôme de degré n donc d'après la formule de Taylor, $\mathrm{B}_n(x+\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}_n^{(k)}(x)}{k!}\mathrm{X}^k$ et donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{B}_n^{(k)}(x)}{k!}y^k$.
Par ailleurs, d'après la question 7, $\mathrm{B}'_n = n\mathrm{B}_{n-1}$ donc (par récurrence) $\mathrm{B}_n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathrm{B}_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\mathrm{B}_{n-k}$.
Ainsi, $\mathrm{B}_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\mathrm{B}_{n-k}(x)y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_{n-k}(x)y^k$.

Question 10. Pour $x = 0$ on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}_n(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_{n-k}(0)y^k$ donc $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}\mathrm{X}^k$ (identification entre un polynôme et la fonction polynomiale associée).
Pour $y = 1$ et en remplaçant n par $n+1$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}_{n+1}(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_{n+1-k}(x) = \mathrm{B}_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_{n+1-k}(x)$.
Mais $(n+1)\mathrm{X}^n = \Delta(\mathrm{B}_{n+1}) = \mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X})$ donc $(n+1)\mathrm{X}^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_{n+1-k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\mathrm{B}_j$ (en posant $j = n+1-k$).
Enfin, en évaluant en 0 ce dernier résultat on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_k(0) = (n+1)0^n = 0$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k = 0$.