Corrigé : polynômes de Tchebychev

Partie I. Polynômes de Tchebychev de première espèce

Question 1.

a) On obtient $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

b) Notons c_n le coefficient dominant de T_n et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\deg T_n = n$ et $c_n = 2^{n-1}$.

– Le résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

– Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Ainsi, $\deg(2XT_{n-1}) = n$ et $\deg T_{n-2} = n-2$ donc $\deg T_n = \deg(2XT_{n-1} - T_{n-2}) = n$ et $c_n = 2c_{n-1} = 2^{n-1}$, ce qui établit le résultat au rang n : la récurrence se propage.

c) Montrons par récurrence sur n que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

– C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

– Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors :

$$T_n(-X) = -2XT_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = -(-1)^{n-1}2XT_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}T_{n-2}(X) = (-1)^n T_n(X)$$

ce qui établit le résultat au rang n : la récurrence se propage.

De cette égalité il résulte que T_n est un polynôme pair lorsque n est pair, et un polynôme impair lorsque n est impair.

d) La suite $a_n = T_n(1)$ vérifie les relations : $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ et on établit sans peine par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$.

D'après la question précédente, $T_n(-1) = (-1)^n T_n(1) = (-1)^n$.

Enfin, la suite $b_n = T_n(0)$ vérifie les relations $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ et $b_{n+2} = -b_n$ donc $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.

Question 2.

a) Montrons par récurrence sur n que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$:

– c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$;

– si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors

$$T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta.$$

On utilise la formule $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$:

$$2\cos\theta\cos(n-1)\theta = \cos\Big(n-1)\theta + \theta\Big) + \cos\Big((n-1)\theta - \theta\Big) = \cos(n\theta) + \cos(n-2)\theta$$

donc $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et la récurrence se propage.

b) S'il existait un autre polynôme S_n vérifiant la même relation, nous aurions pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $T_n(\cos\theta) = S_n(\cos\theta)$ et le polynôme $T_n - S_n$ posséderait une infinité de racine ; il s'agirait donc du polynôme nul. Ainsi, on peut affirmer que T_n est l'unique polynôme vérifiant la relation : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Question 3.

a) On a $T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \dfrac{\pi}{2} \bmod \pi$. Les valeurs de θ pour lesquelles $T_n(\cos\theta) = 0$ sont les $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) Les réels $x_k = \cos\theta_k$ sont donc racines de T_n ; cependant ces valeurs ne sont pas deux à deux distinctes. Néanmoins, si on se restreint aux valeurs de $k \in [\![0, n-1]\!]$, les θ_k correspondants constituent n valeurs distinctes de l'intervalle $]0,\pi[$. Puisque la fonction cos réalise une bijection de $]0,\pi[$ vers $]-1,1[$, on en déduit que $x_0,\dots,x_{n-1}$ sont n racines *distinctes* de T_n. Ainsi, le polynôme T_n est de degré n et possède n racines distinctes ; il ne peut en posséder d'autres et est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

c) On peut donc écrire $T_n = 2^{n-1}(X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$, avec $x_k = \cos\Big(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\Big)$.

Ainsi, $T_n(0) = (-1)^n 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} x_k = (-1)^n 2^{n-1} p_n$, et d'après la question 1.d, $p_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^p}{2^{2p-1}} & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$

Le coefficient devant X^{n-1} dans T_n vaut $-2^{n-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k = -2^{n-1}s_n$. Or nous savons que le polynôme T_n a même parité que n, en conséquence de quoi ce coefficient est nul. Ainsi, $s_n = 0$.

Question 4.

a) Dérivons deux fois par rapport à θ la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) = -n^2\cos(n\theta)$$

En posant $x = \cos\theta$ cette dernière égalité peut aussi s'écrire : $\forall x \in [-1,1]$, $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) = -n^2T_n(x)$ donc T_n est solution sur $[-1,1]$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

b) Le polynôme $(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n$ s'annule sur $[-1,1]$ donc possède une infinité de racines ; il s'agit donc du polynôme nul, ce qui montre que T_n est solution de l'équation différentielle (2) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Partie II. Polynômes de Tchebychev de seconde espèce

Question 5.

a) On obtient $U_2 = 4X^2 - 1$, $U_3 = 8X^3 - 4X$ et $U_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$:

- c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ car $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors

$$\sin\theta U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\sin(n\theta) - \sin(n-1)\theta = \sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta - \sin(n-1)\theta) = \sin(n+1)\theta$$

en utilisant la relation : $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$. Ceci montre que la récurrence se propage.

c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$, ce qui donne en dérivant : $-\sin\theta T_{n+1}'(\cos\theta) = -(n+1)\sin(n+1)\theta$, soit : pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{T_{n+1}'(\cos\theta)}{n+1} = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(\cos\theta)$.

Le polynôme $\dfrac{1}{n+1}T_{n+1}' - U_n$ possède une infinité de racines ; il s'agit donc du polynôme nul, et $U_n = \dfrac{1}{n+1}T_{n+1}'$.

Nous avons démontré à la question 3.b que le polynôme T_{n+1} possède $n+1$ racines réelles distinctes $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. D'après le théorème de Rolle, le polynôme T_{n+1}' possède sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ (pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$) au moins une racine. Ainsi, le polynôme U_n est un polynôme de degré n possédant au moins n racines distinctes ; il est forcément scindé à racines simples.

d) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} U_{n+1}(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta\cos\theta + \sin\theta\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} = \cos\theta\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + \cos(n+1)\theta \\ &= \cos\theta U_n(\cos\theta) + T_{n+1}(\cos\theta) \end{aligned}$$

Le polynôme $U_{n+1} - XU_n - T_{n+1}$ possède une infinité de racines ; il s'agit du polynôme nul.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on peut donc écrire : $X^{n-k}T_k = X^{n-k}U_k - X^{n-(k-1)}U_{k-1}$ et par télescopage :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X^{n-k}T_k = X^0U_n - X^{n-0}U_0 = U_n - X^n$ soit $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^{n-k}T_k$ puisque $T_0 = U_0 = 1$.

Question 6.

a) Le discriminant de l'expression $1 - 2xt + t^2$, polynomiale en t, vaut $\Delta = 4(x^2-1)$ donc :

- si $x \in]-1,1[$ on a $\Delta < 0$: le dénominateur de f_x ne s'annule pas et $\mathcal{D}_x = \mathbb{R}$;
- si $x = \pm 1$ on a $\Delta = 0$: le dénominateur de f_x s'annule pour $t = x$ et $\mathcal{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$;
- si $|x| > 1$ on a $\Delta > 0$: le dénominateur de f_x s'annule en deux valeurs $x \pm \sqrt{x^2-1}$ et $\mathcal{D}_x = \mathbb{R} \setminus \left\{x - \sqrt{x^2-1}, x + \sqrt{x^2-1}\right\}$.

b) Quel que soit x, la fonction f_x est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc possède un développement limité à tout ordre donné par la formule de Taylor-Young.

c) Notons $f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^k + o(t^n)$ ce développement limité. Nous avons

$$1 = (1-2xt+t^2)f_x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^n - \sum_{k=0}^{n} 2xa_k(x)t^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^{n+2} + o(t^n).$$

Ré-indexons les deux dernières sommes :

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^n - \sum_{k=1}^{n+1} 2xa_{k-1}(x)t^n + \sum_{k=2}^{n+2} a_{k-2}(x)t^n + o(t^n)\\ &= a_0(x) + \big(a_1(x) - 2xa_0(x)\big)t + \sum_{k=2}^{n}\big(a_k(x) - 2xa_{k-1}(x) + a_{k-2}(x)\big)t^n + o(t^n)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité de la fonction constante $t \mapsto 1$ on en déduit les relations :

$$a_0(x) = 1, \qquad a_1(x) = 2x \qquad \text{et pour tout } k \in [\![2, n]\!],\ a_k(x) = 2xa_{k-1}(x) - a_{k-2}(x).$$

On reconnaît les relations qui définissent les polynômes U_k, donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k(x) = \mathrm{U}_k(x)$.

d) Pour $x = -1/2$ on a donc $\dfrac{1}{1+t+t^2} = \mathrm{U}_0(-1/2) + \mathrm{U}_1(-1/2)t + \mathrm{U}_2(-1/2)t^2 + \mathrm{U}_3(-1/2)t^3 + \mathrm{U}_4(-1/2)t^4 + o(t^4)$.
La suite $(\mathrm{U}_n(-1/2))$ est définie par les relations $\mathrm{U}_0(-1/2) = 1$, $\mathrm{U}_1(-1/2) = -1$ et $\mathrm{U}_{n+2}(-1/2) = -\mathrm{U}_{n+1}(-1/2) - \mathrm{U}_n(-1/2)$. Il est dès lors facile de calculer $\mathrm{U}_2(-1/2) = 0$, $\mathrm{U}_3(-1/2) = 1$, $\mathrm{U}_4(-1/2) = -1$, et ainsi $\dfrac{1}{1+t+t^2} = 1 - t + t^3 - t^4 + o(t^4)$.

Question 7. Deux possibilités s'offrent à nous : partir d'une liste à deux éléments et ajouter un par un les éléments suivants (solution de gauche) ou partir d'une liste vide à $n+1$ éléments et la remplir peu à peu (solution de droite).

```python
def developpement(x, n):
    U = [1, 2 * x]
    for k in range(2, n + 1):
        U.append(2 * x * U[k - 1] - U[k - 2])
    return U
```

```python
def developpement(x, n):
    U = [None] * (n + 1)
    U[0] = 1
    U[1] = 2 * x
    for k in range(2, n + 1):
        U[k] = 2 * x * U[k - 1] - U[k - 2]
    return U
```

Partie III. Interpolation de Lagrange aux points de Tchebychev

Question 8.

a) La fonction ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de définition, et pour tout $x > 1$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{x^2}\Big) > 0$ donc ϕ est strictement croissante. Sachant que $\lim\limits_{x\to 1}\phi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = +\infty$, ϕ réalise bien une bijection de $]1, +\infty[$ dans lui-même.

b) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathrm{T}_n\big(\phi(x)\big) = \dfrac{1}{2}\Big(x^n + \dfrac{1}{x^n}\Big)$.

- C'est évident si $n = 1$, et si $n = 2$, $\mathrm{T}_2\big(\phi(x)\big) = \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)^2 - 1 = \dfrac{1}{2}\Big(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\Big)$.
- Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors

  $$\mathrm{T}_n\big(\phi(x)\big) = 2\phi(x)\mathrm{T}_{n-1}\big(\phi(x)\big) - \mathrm{T}_{n-2}\big(\phi(x)\big) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\Big(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\Big) - \frac{1}{2}\Big(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big)$$

  et la récurrence se propage.

c) Pour tout $x > 1$ on a $\mathrm{T}_n\big(\phi(x)\big) = \phi(x^n)$. Pour $y > 1$ appliquons cette relation à $x = \phi^{-1}(y)$; on obtient : $\mathrm{T}_n(y) = \phi(x^n) \in\ ]1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $y > 1$ on a $\mathrm{T}_n(y) > 1$.
Prouvons maintenant par récurrence sur n que pour tout $x > 1$, $\mathrm{T}_n(x) \leqslant 2^{n-1}x^n$:

- c'est clair pour $n = 1$ car $x \leqslant x^n$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors $\mathrm{T}_n(x) = 2x\mathrm{T}_{n-1}(x) - \mathrm{T}_{n-2}(x) \leqslant 2x(2^{n-2}x^{n-1}) - 1 \leqslant 2^{n-1}x^n$, ce qui montre que la récurrence se propage.

Question 9.

a) De manière évidente, $L_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $L_k(x_k) = 1$.

b) Montrons que la famille (L_k) est libre en considérant $n+1$ scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$. En appliquant ce polynôme au scalaire x_i on obtient : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k(x_i) = 0$, soit $\lambda_i = 0$ d'après la question précédente.

La famille $(L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre et constitue donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

c) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe donc des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$. Mais alors $P(x_i) = \lambda_i$, ce qui conduit à la décomposition : $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$.

d) D'après la formule établie à la question 2.a, $T_n(x_k) = \cos(n-k)\pi = (-1)^{n-k}$ donc $T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L_k$.

Question 10.

a) Soit $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$. Pour tout $x \geqslant 1$ on a $x - x_j \geqslant 0$ car $x_j \leqslant 1 \leqslant x$.

En revanche, on a $\begin{cases} x_k - x_j > 0 & \text{si } j < k \\ x_k - x_j < 0 & \text{si } j > k \end{cases}$. Le produit $L_k(x)$ est donc constitué de k termes positifs et de $n-k$ termes négatifs, en conséquence de quoi $(-1)^{n-k} L_k(x) \geqslant 0$.

De ceci il résulte que pour $x \geqslant 1$, $\left|L_k(x)\right| = (-1)^{n-k} L_k(x)$, et compte tenu de la formule établie en 9.d : $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|L_k(x)\right|$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k \in [-1, 1]$ donc $\left|P(x_k)\right| \leqslant M(P)$. D'après la formule établie en 9.c on a donc :

$$\forall x \geqslant 1, \quad |P(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(x_k)| \cdot |L_k(x)| \leqslant M(P) \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)| = M(P) T_n(x).$$

c) Pour tout $x \geqslant 1$ on a d'après 8.c : $1 \leqslant T_n(x) \leqslant 2^{n-1} x^n$ donc $M(P) \geqslant \dfrac{|P(x)|}{2^{n-1} x^n}$.

Posons maintenant, puisque P est un polynôme unitaire de degré n, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On a $\dfrac{P(x)}{x^n} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{x^{n-k}}$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x^n} = 1$, et ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente on obtient $M(P) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

d) Nous avons $M(T_n) = \max_{x \in [-1,1]} \left|T_n(x)\right| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} \left|T_n(\cos\theta)\right| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} \left|\cos(n\theta)\right| = 1$ et nous savons que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 2^{n-1}. Le polynôme $P = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ est donc unitaire de degré n, et $M(P) = \dfrac{1}{2^{n-1}} M(T_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.