Opérateurs en dimension infinie (X PSI 2014 - extrait)

Durée : libre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|\cdot\|_E$. On appelle *opérateur* sur E tout endomorphisme continu T de E dans E, autrement dit tel que

$$\exists M \geqslant 0 \mid \forall f \in E,\ \|T(f)\|_E \leqslant M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.
L'objectif de ce problème est d'étudier différents exemples ou classes de tels opérateurs dans le cadre de la dimension infinie.
On rappelle que le *spectre* de $T \in \mathcal{L}_c(E)$ est l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note Sp(T) l'ensemble de ces réels.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie I Un premier exemple d'opérateur

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(E)$.

2. Calculer la valeur minimale possible pour la constante M de la relation (1).

3. Déterminer Ker(T) et Im(T).

4. Si l'on munit maintenant E de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

T est-il toujours un opérateur ?

Partie II Un premier exemple de calcul de spectre

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

On note S, respectivement V, l'application de décalage à gauche : $(Su)_n = u_{n-1}$ si $n \geqslant 1$ et $(Su)_0 = 0$, respectivement à droite : $(Vu)_n = u_{n+1}$ si $n \geqslant 0$ dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

5. Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}_c(H)$.

6. Calculer le spectre de S et V.

Partie III Un second exemple de calcul de spectre

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x}$$

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$\mathrm{K}(s,t) = (1-s)t \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{K}(s,t) = (1-t)s \text{ sinon}$$

On note T l'application définie sur E par le relation

$$\forall f \in \mathrm{E},\ \forall s \in [0,1], \quad \mathrm{T}(f)(s) = \int_0^1 \mathrm{K}(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

7. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}_c(\mathrm{E})$.

8. Soit $f \in \mathrm{E}$. En décomposant $\mathrm{T}(f)$ en deux intégrales, montrer que $\mathrm{T}(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et exprimer $\mathrm{T}(f)'$ puis $\mathrm{T}(f)''$.

9. Montrer que T est injectif.

10. Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{T})$ et $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}d)$ alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

11. En déduire $\sigma_p(\mathrm{T})$. Calculer les sous-espaces propres associés $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id})$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(\mathrm{T})$.