Corrigé : opérateurs en dimension infinie (X PSI 2014 - extrait)

Partie I Un premier exemple d'opérateur

1. Montrons que l'application $f \mapsto \mathrm{T}(f)$ est linéaire :

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{T}(\lambda f + g)(x) = x\big(\lambda f + g\big)(\mathrm{X}/2) = \lambda x f(x/2) + x g(x/2) = \big(\lambda \mathrm{T}(f) + \mathrm{T}(g)\big)(x)$$

Montrons maintenant que T est continu :

$$\forall x \in [0,1], \quad \big|\mathrm{T}(f)(x)\big| = x\big|f(x/2)\big| \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

donc $\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$; nous avons montré que T est un opérateur.

2. Nous avons montré à la question précédente que $\mathrm{M} = 1$ convient. En outre, si on considère la fonction constante $f : x \mapsto 1$ nous avons $\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ donc toute constante M qui convient doit vérifier $\mathrm{M} \geqslant 1$. La valeur minimale possible pour M est donc $\mathrm{M} = 1$. Autrement dit, avec les notations du cours, $|||\mathrm{T}||| = 1$.

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a $\mathrm{T}(f) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in]0,1]$, $f(x/2) = 0$, autrement dit si et seulement si f est nulle sur $]0,1/2]$. f étant continue en 0, on en déduit que les éléments de $\mathrm{T}(f)$ sont les fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont nulles sur $[0,1/2]$.

Considérons maintenant $g \in \mathrm{E}$. Alors $\mathrm{T}(f) = g \iff \forall x \in [0,1],\ g(x) = xf(x/2) \iff g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1],\ f(x/2) = \dfrac{g(x)}{x}$

$$\iff g(0) = 0 \text{ et } \forall y \in]0,1/2],\ f(y) = \frac{g(2y)}{2y}.$$

On observe que f est continue en 0 si et seulement si g est dérivable en 0 (car dans ce cas $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(t)}{t} = g'(0)$). Ainsi, $\operatorname{Im}\mathrm{T}$ est l'ensemble des fonctions $g : [0,1/2] \to \mathbb{R}$ qui sont continue sur $[0,1/2]$, vérifient $g(0) = 0$ et sont dérivables en 0.

4. La linéarité est indépendante de la norme donc on a déjà montré à la première question que T est linéaire.

Pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x/2)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x/2)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} f(y)^2\,\mathrm{d}y$ (en posant $y = x/2$).

On en déduit que $\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 \leqslant 2\displaystyle\int_0^1 f(y)^2\,\mathrm{d}y = 2\|f\|_2^2$ et ainsi, $\|\mathrm{T}(f)\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|f\|_2$. T est toujours un opérateur pour cette seconde norme.

Partie II Un premier exemple de calcul de spectre

5. Montrons que S est linéaire :

$$\mathrm{S}(\lambda u + v)_0 = 0 = \lambda \mathrm{S}(u)_0 + \mathrm{S}(v)_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{S}(\lambda u + v)_n = \lambda u_{n-1} + v_{n-1} = \lambda \mathrm{S}(u)_n + \mathrm{S}(v)_n$$

donc $\mathrm{S}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{S}(u) + \mathrm{S}(v)$.

Montrons que S est un opérateur : $\|\mathrm{S}(u)\|_2^2 = 0^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \|u\|_2^2$ donc $\|\mathrm{S}(u)\|_2 = \|u\|_2$.

Montrons que V est linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{V}(\lambda u + v)_n = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda \mathrm{V}(u)_n + \mathrm{V}(v)_n$$

donc $\mathrm{V}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{V}(u) + \mathrm{V}(v)$.

Montrons que V est un opérateur : $\|\mathrm{V}(u)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \|u\|_2^2$ donc $\|\mathrm{V}(u)\|_2 \leqslant \|u\|_2$.

6. λ appartient au spectre ponctuel de S si et seulement s'il existe une suite (u_n) non identiquement nulle telle que $S(u) = \lambda u$, autrement dit si et seulement si $\lambda u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n-1} = \lambda u_n$.
On constate qu'il ne peut y avoir de solution non nulle pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda \neq 0$, ces équations sont équivalentes à $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{u_0}{\lambda^n}$ donc là encore, il ne peut y avoir de solution non nulle. Ainsi, $\mathrm{Sp}_p(\mathrm{S}) = \varnothing$.
λ appartient au spectre ponctuel de V si et seulement s'il existe une suite (u_n) non identiquement nulle telle que $V(u) = \lambda u$, autrement dit si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n$.
Ces équations se résolvent en $u_n = \lambda^n u_0$, mais pour que cette suite soit élément de E il faut que la série $\sum \lambda^{2n}$ converge, autrement dit que $\lambda \in]-1,1[$. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}) =]-1,1[$.

Partie III Un second exemple de calcul de spectre ponctuel

7. On démontrera à la question suivante que si $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc continue, et ainsi que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.
Pour tout $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\forall s \in [0,1], \mathrm{T}(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\big(\lambda f + g\big)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{K}(s,t) g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \mathrm{T}(f)(s) + \mathrm{T}(g)(s)$$

donc $\mathrm{T}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{T}(f) + t(g)$; T est linéaire.
Pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\|\mathrm{T}(f)\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{T}(f)(s)^2\,\mathrm{d}s$.
Puisque $0 \leqslant \mathrm{K}(s,t) \leqslant 1$ on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathrm{T}(f)(s)| = \left|\int_0^1 \mathrm{K}(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \|f\|_2$$

donc en intégrant : $\|\mathrm{T}(f)\|^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \|f\|_2^2\,\mathrm{d}s = \|f\|^2$. T est bien un opérateur.

8. Pour tout $s \in [0,1]$, $\mathrm{T}(f)(s) = \displaystyle\int_0^s \mathrm{K}(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \mathrm{K}(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s t f(t)\,\mathrm{d}t - s\int_1^s (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
f est continue donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $s \mapsto \displaystyle\int_0^s t f(t)\,\mathrm{d}t$ et $s \mapsto \displaystyle\int_1^s (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, avec pour dérivées successives $s \mapsto s f(s)$ et $s \mapsto (1-s) f(s)$.
On en déduit que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $\mathrm{T}(f)'(s) = -\displaystyle\int_0^s t f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^s (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
Cette dernière expression prouve que $\mathrm{T}(f)'$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$, autrement dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$, avec $\mathrm{T}(f)''(s) = -f(s)$.

9. Si $f \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}$ alors $\mathrm{T}(f) = 0$, ce qui implique $\mathrm{T}(f)'' = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que $f = 0$: T est injectif.

10. La question précédente a montré que $0 \notin \sigma_p(\mathrm{T})$ donc $\lambda \neq 0$. L'équation $\mathrm{T}(f) = \lambda f$ montre alors que f, à l'instar de $\mathrm{T}(f)$, est de classe $\mathscr{C}^2$, et en dérivant deux fois : $\mathrm{T}(f)'' = \lambda f''$, soit $\lambda f'' + f = 0$.
En outre, pour tout $tin[0,1]$, $\mathrm{K}(0,t) = \mathrm{K}(1,t) = 0$ donc $\mathrm{T}(f)(0) = \mathrm{T}(f)(1) = 0$, ce qui implique, puisque $\lambda \neq 0$, $f(0) = f(1) = 0$.

11. On résout cette équation différentielle en distinguant deux cas :

- si $\lambda < 0$ on pose $\lambda = -\dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega > 0$ et alors il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $s \in [0,1]$, $f(s) = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}(\omega s) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}(\omega s)$.
  Mais les conditions $f(0) = f(1) = 0$ imposent $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$ soit $f = 0$. λ n'est donc pas valeur propre de T.
- si $\lambda > 0$ on pose $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega > 0$ et alors il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $s \in [0,1]$, $f(s) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$.
  Les conditions $f(0) = f(1) = 0$ imposent $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B}\sin\omega = 0$ donc si $\sin\omega \neq 0$, $f = 0$ et λ n'est pas valeur propre de f.
  En revanche, si $\sin\omega = 0$, λ est valeur propre, avec pour vecteurs propres les fonctions $f : s \mapsto \mathrm{B}\sin(\omega t)$ pour $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^*$.

Réciproquement, il reste à vérifier que les fonctions de la forme $f : s \mapsto \sin(n\pi s)$ vérifient $\mathrm{T}(f) = \dfrac{1}{n^2\pi^2} f$ (le calcul est laissé au lecteur) pour pouvoir conclure :
$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \left\{\dfrac{1}{n^2\pi^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{T} - \dfrac{1}{n^2\pi^2}\mathrm{Id}\Big) = \mathrm{Vect}\big(s \mapsto \sin(n\pi s)\big)$.