

PERTURBATIONS DE RANG 1 DE MATRICES (X PC 2025)

Durée : libre

Le but de ce sujet est d'étudier les perturbations de rang 1 de matrices.

Notations

Dans l'ensemble du sujet, m, n désignent des entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n \times n$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée A^T .

Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans ce sujet, les vecteurs sont identifiés à des matrices colonnes $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par exemple

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{de transposée} \quad x^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ la matrice $x^T y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle x | y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Les deux premières parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Les parties 4 et 5 sont indépendantes entre elles, et s'appuient sur des résultats des parties précédentes.

À tout moment il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Partie I

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $M = uv^T$. Montrer que M est une matrice carrée de taille $n \times n$, de rang 1.
2. Calculer avec justification le rang de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Réciproquement, soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $K = uv^T$.
4. Soient $u, v, x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $uv^T = xy^T$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $u = \lambda x$ et $v = \frac{1}{\lambda} y$.
5. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = uv^T$.
 - a) Montrer que $\text{tr}(K) = \langle v | u \rangle$.
 - b) Montrer que $K^2 = (\text{tr } K)K$.
 - c) En déduire que K est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } K \neq 0$.
6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 si et seulement si il existe $y \in \mathbb{R}^n$ avec $\|y\| = 1$ tel que $P = yy^T$.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

7. Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que $\det(I_n + uv^T) = 1 + \langle v | u \rangle$.
9. Montrer plus généralement que $\det(A + uv^T) = \det(A)(1 + \langle v | A^{-1}u \rangle)$.
10. Montrer que $A + uv^T$ est inversible si et seulement si $\langle v | A^{-1}u \rangle \neq -1$.
11. On suppose que $A + uv^T$ est inversible. Montrer que

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + \langle v | A^{-1}u \rangle}.$$

12. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\det(C) = 0$. A-t-on toujours $\det(C + uv^T) = 0$? Justifiez votre réponse.

Partie III

On s'intéresse maintenant au cas où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$. On pose $B = A + uu^T$.

13. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $M = N$ si et seulement si $Mv_k = Nv_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

14. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^n v_k v_k^T$.

15. On s'intéresse maintenant à la matrice symétrique A . En vertu du théorème spectral, on note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A , et $(w_1, \dots, w_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondante.

a) Montrer que $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a $(xI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T$.

16. Soit λ une valeur propre de A de multiplicité $m \geq 2$. On pose $E = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

a) Montrer que $\dim(E \cap \{u\}^\perp) \geq m - 1$.

b) En déduire que λ est une valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

17. On note $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A , et $\chi_B(x) = \det(xI_n - B)$ celui de B . Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle^2}{x - \lambda_k} \right)$$

18. Soit $J = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \langle w_k | u \rangle \neq 0\}$ l'ensemble des indices k tels que $\langle w_k | u \rangle \neq 0$.

a) Montrer que $J \neq \emptyset$.

b) Soit $\ell \notin J$. Montrer que λ_ℓ est une valeur propre de B .

c) On suppose que $J = \{j\}$ pour un $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Montrer que les valeurs propres de B sont $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$.

19. On suppose dans cette question que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, et que $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle^2}{x - \lambda_k}$$

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, et calculer sa dérivée $f'(x)$.
 b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans chaque intervalle $]\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}[$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, et dans $]\lambda_n, +\infty[$.
 c) On note $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ les valeurs propres de B. Montrer que $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$.

Partie IV

Dans cette quatrième partie, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$. On considère une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ quelconque. Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble fini $\{u_1, \dots, u_n\}$, et qui suit la loi uniforme sur cet ensemble. On note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On considère la variable aléatoire B , à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $B = A + UU^T$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\chi_B(x) = \det(xI_n - B)$, qui est une variable aléatoire à valeurs réelles.

20. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{E}(\langle U | w \rangle^2) = \frac{1}{n} \|w\|^2$.
 21. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Montrer que la variable aléatoire $\chi_B(x)$ a une espérance finie, et que, en notant χ'_A la dérivée du polynôme χ_A , on a

$$\mathbb{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x).$$

22. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\mathbb{E}(\chi_B(\lambda_k)) = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k)$.

23. Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(\chi_B(x)) \neq 0$.

Partie V

Comme dans la troisième partie, on suppose que $B = A + uu^T$ avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\|u\| = 1$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de B . On admet que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

On suppose de plus qu'il existe un entier $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que les valeurs propres de A vérifient :

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Soit $\epsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

24. Justifier que $(A - \epsilon I_n)$ est inversible.

On suppose dans la suite que $\langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle < -1$.

25. Montrer que $(B - \epsilon I_n)$ est inversible.

26. Montrer que $\text{tr}((B - \epsilon I_n)^{-1}) > \text{tr}((A - \epsilon I_n)^{-1})$.

27. Montrer que $\mu_m > \epsilon$.