

CORRIGÉ : PERTURBATIONS DE RANG 1 DE MATRICES (X PC 2025)

Partie I

- On a $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $v^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc $uv^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\text{rg}(M) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v) = 1$. Enfin, il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $u_i \neq 0$ et $v_j \neq 0$ et puisque le coefficient de rang (i, j) de la matrice M vaut $u_i v_j$ on en déduit que $M \neq 0$ et donc que $\text{rg } M = 1$.
- Posons $u^T = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)$. Alors $J = uu^T$ donc d'après la question précédente, $\text{rg } J = 1$.
- Notons $k_1, \dots, k_n$ les vecteurs colonnes de K . $\text{rg } K = 1$ donc il existe un espace vectoriel $\text{Vect}(u)$ de dimension 1 tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k_j \in \text{Vect}(u)$. Posons $k_j = v_j u$ avec $v_j \in \mathbb{R}$, puis $v^T = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n)$. Alors $K = uv^T$.
- Supposons $uv^T = xy^T$. Alors $uv^T v = xy^T v$, soit encore $\|v\|^2 u = \langle y | v \rangle x$. On a donc $u = \lambda x$ avec $\lambda = \frac{\langle y | v \rangle}{\|v\|^2}$.
De même, $u^T uv^T = u^T xy^T$ soit $\|u\|^2 v^T = \langle u | x \rangle y^T$ donc $v = \mu y$ avec $\mu = \frac{\langle u | x \rangle}{\|u\|^2} = \frac{\lambda \|x\|^2}{\lambda^2 \|x\|^2} = \frac{1}{\lambda}$.
La réciproque est évidente.
- $\text{tr}(K) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle u | v \rangle$.
 - $K^2 = u(v^T u)v^T$ avec $v^T u = \langle u | v \rangle \in \mathbb{R}$ donc $K^2 = \langle u | v \rangle K = \text{tr}(K)K$.
 - Si $\text{tr } K \neq 0$ le polynôme $X(X - \text{tr } K)$ est scindé à racines simples et annule K donc K est diagonalisable.
Si $\text{tr } K = 0$ alors $K^2 = 0$ donc $\text{Sp}(K) \subset \{0\}$. Or seule la matrice nulle est diagonalisable et a un spectre réduit à $\{0\}$, donc K n'est pas diagonalisable.
- Supposons que P soit un projecteur orthogonal de rang 1, et notons y un vecteur de norme 1 qui engendre son image. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Px = \langle y | x \rangle y = (y^T x)y = y(y^T x) = (yy^T)x$ (car $y^T x \in \mathbb{R}$) donc $P = yy^T$.
Réciproquement, si $P = yy^T$ avec $\|y\| = 1$ alors $Px = y(y^T x) = \langle y | x \rangle y$ et on reconnaît l'expression du projeté orthogonal sur $\text{Vect}(y)$ donc P est bien la matrice d'un projecteur orthogonal de rang 1.

Partie II

- On calcule $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & u \\ 0 & v^T u + 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
- En passant au déterminant on obtient : $1 \times \det(I_n + uv^T) \times 1 = v^T u + 1 = \langle v | u \rangle + 1$.
- A est inversible donc $\det(A + uv^T) = \det A \times \det(I_n + A^{-1}uv^T)$ et en appliquant la question précédente aux vecteurs $A^{-1}u$ et v , $\det(I_n + A^{-1}uv^T) = 1 + \langle v | A^{-1}u \rangle$ donc $\det(A + uv^T) = \det A (1 + \langle v | A^{-1}u \rangle)$.
- Puisque $\det A \neq 0$, $\det(A + uv^T)$ est non nul si et seulement si $\langle v | A^{-1}u \rangle \neq -1$.
- Posons $B = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + \langle v | A^{-1}u \rangle}$ et calculons : $B(A + uv^T) = I_n + A^{-1}uv^T - \frac{1}{1 + \langle v | A^{-1}u \rangle} (A^{-1}uv^T + (A^{-1}uv^T)^2)$.
Si $u = 0$ ou $v = 0$ on trouve bien $B(A + uv^T) = I_n$.
Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, la matrice $(A^{-1}u)v^T$ est, d'après la première partie appliquée aux vecteurs $A^{-1}u$ et v , une matrice de rang 1, et donc $(A^{-1}uv^T)^2 = \langle v | A^{-1}u \rangle A^{-1}uv^T$, et le calcul ci-dessus se simplifie en $B(A + uv^T) = I_n$.
On a bien montré dans tous les cas que $B = (A + uv^T)^{-1}$.

12. On peut avoir $\det C = 0$ et $\det(C + uv^T) \neq 0$; c'est le cas lorsque $C = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1)$ et $u^T = v^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ car dans

ce cas la matrice $C + uv^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$ est inversible (son déterminant vaut $(n-1)!$).

Partie III

13. $B^T = A^T + (u^T)^T u^T = A + uu^T = B$ donc $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

14. Posons $M = \sum_{k=1}^n v_k v_k^T$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Mv_j = \sum_{k=1}^n v_k v_k^T v_j = \sum_{k=1}^n \langle v_k | v_j \rangle v_k = v_j$ car la base est orthonormale, donc $M = I_n$.

15. a) Posons $M = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Mw_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle w_k | w_j \rangle w_k = \lambda_j w_j = Aw_j$ donc $M = A$.

b) Notons que puisque $x \notin \text{Sp}(A)$, la matrice $xI_n - A$ est inversible.

Posons $M = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Mw_j = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \langle w_k | w_j \rangle w_k = \frac{1}{x - \lambda_j} w_j = (xI_n - A)^{-1} w_j$ car $(xI_n - A)w_j = xw_j - \lambda_j w_j = (x - \lambda_j)w_j$ donc $M = (xI_n - A)^{-1}$.

16. a) D'après la formule de Grassmann, $\dim(E \cap \{u\}^\perp) = \dim E + \dim \{u\}^\perp - \dim(E + \{u\}^\perp) \geq \dim E + \dim \{u\}^\perp - n = \dim E - 1$ car $\{u\}^\perp$ est un hyperplan. La matrice A est diagonalisable donc $\dim E$ est égal à la multiplicité de la valeur propre associée, et donc $\dim(E \cap \{u\}^\perp) \geq m - 1$.

b) Pour tout $x \in E \cap \{u\}^\perp$, $Bx = Ax = \lambda x$ car $\langle u | x \rangle = u^T x = 0$ donc $E \cap \{u\}^\perp \subset \text{Ker}(B - \lambda I_n)$, et ainsi, $\dim \text{Ker}(B - \lambda I_n) \geq m - 1$: λ est valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

17. $\chi_B(x) = \det(xI_n - A - uu^T) = \det(xI_n - A) \times \det(I_n - (xI_n - A)^{-1} uu^T)$.

D'après la question 15, $(xI_n - A)^{-1} uu^T = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T uu^T = \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle}{x - \lambda_k} w_k u^T = vu^T$ avec $v = \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle}{x - \lambda_k} w_k$.

D'après la question 8, $\det(I_n - (xI_n - A)^{-1} uu^T) = \det(I_n - vu^T) = 1 - \langle v | u \rangle = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle}{x - \lambda_k} \langle w_k | u \rangle$ donc en définitive,

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle^2}{x - \lambda_k} \right).$$

18. a) Si on avait $J = \emptyset$ on aurait pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle w_k | u \rangle = 0$ et donc $u = 0$ car (w_k) est une base orthonormée, ce qui n'est pas. On a donc $J \neq \emptyset$.

b) $\ell \notin J$ donc $\langle w_\ell | u \rangle = 0$. L'expression $1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle^2}{x - \lambda_k}$ est donc définie en λ_ℓ et par voie de conséquence possède une limite lorsque x tend vers λ_ℓ .

Puisque par ailleurs $\chi_A(\lambda_\ell) = 0$ on en déduit en faisant tendre x vers λ_ℓ dans la relation obtenue à la question 17 que $\chi_B(\lambda_\ell) = 0$ et donc que λ_ℓ est valeur propre de B .

c) Dans cette question, on a pour tout $k \neq j$, $\langle w_k | u \rangle = 0$ donc $u \in \text{Vect}(w_j)$ et s'agissant de vecteurs unitaires, $u = \pm w_j$. On a donc pour tout $x \neq \lambda_j$, $\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \frac{\langle w_j | u \rangle^2}{x - \lambda_j} \right) = \chi_A(x) \left(1 - \frac{1}{x - \lambda_j} \right) = \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_j} (x - \lambda_j - 1) = (x - \lambda_j - 1) \prod_{k \neq j} (x - \lambda_k)$.

Ainsi, $\text{Sp}(B) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)$.

19. a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, et $f'(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | u \rangle^2}{(x - \lambda_k)^2} < 0$.

b) La fonction f est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ (pour $1 \leq k \leq n-1$) et $]\lambda_n, +\infty[$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\lim_{x \rightarrow \lambda_k^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \lambda_k^+} f(x) = +\infty$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc d'après le théorème de la bijection continue il existe un unique antécédent de 1 par f dans chacun des intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ ainsi que dans $]\lambda_n, +\infty[$.

c) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, notons μ_k l'unique réel de $] \lambda_k, \lambda_{k+1} [$ vérifiant $f(\mu_k) = 1$, et μ_n l'unique réel de $] \lambda_n, +\infty [$ vérifiant $f(\mu_n) = 1$.

D'après la question 17 on a $\chi_B(\mu_k) = \chi_A(\mu_k)(1 - f(\mu_k)) = 0$ donc $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont valeurs propres de B, et il ne peut y en avoir d'autres puisque $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie IV

20. D'après la formule de transfert, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}(\langle U | w \rangle^2) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \langle u_j | w \rangle^2 = \frac{1}{n} \|w\|^2$ car (u_k) est une base orthonormée.

21. D'après la question 17, $\mathbb{E}(\chi_B(x)) = \mathbb{E}\left(\chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k | U \rangle^2}{x - \lambda_k}\right)\right)$ et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_k} \mathbb{E}(\langle w_k | U \rangle^2) = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_k} \|w_k\|^2 = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{x - \lambda_k} = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x)$$

$$\text{car } \chi_A(x) = \prod_{k=1}^n (x - \lambda_k).$$

22. Posons $\chi_B(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, les b_k étant des variables aléatoires. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\chi_B(x)) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(b_k) x^k$ donc $x \mapsto \mathbb{E}(\chi_B(x))$ est une fonction polynomiale, donc continue. Ceci nous autorise à faire tendre x vers λ_k dans l'expression obtenue à la question précédente pour obtenir : $\mathbb{E}(\chi_B(\lambda_k)) = \chi_A(\lambda_k) - \frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k) = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k)$.

23. Les deux questions précédentes ont montré que $x \mapsto \mathbb{E}(\chi_B(x))$ est une fonction polynomiale de degré n ; elle s'annule donc au plus n fois dans $\mathbb{R}$.

Partie V

24. $\epsilon \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ donc $A - \epsilon I_n$ est inversible.

25. $B - \epsilon I_n = (A - \epsilon I_n) + uu^T$ et $A - \epsilon I_n$ est inversible donc d'après la question 9, $\det(B - \epsilon I_n) = \det(A - \epsilon I_n) \left(1 + \langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle\right)$.
Or par hypothèse $1 + \langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle < 0$ donc $\det(B - \epsilon I_n) \neq 0$.

26. D'après la question 11, $(B - \epsilon I_n)^{-1} = ((A - \epsilon I_n) - uu^T)^{-1} = (A - \epsilon I_n)^{-1} - \frac{(A - \epsilon I_n)^{-1} uu^T (A - \epsilon I_n)^{-1}}{1 + \langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle}$ donc

$$\text{tr}((B - \epsilon I_n)^{-1}) = \text{tr}((A - \epsilon I_n)^{-1}) - \frac{1}{1 + \langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle} \text{tr}((A - \epsilon I_n)^{-1} uu^T (A - \epsilon I_n)^{-1})$$

Posons $K = (A - \epsilon I_n)^{-1}$. La matrice K est symétrique donc $\text{tr}(Kuu^T K) = \text{tr}((Ku)(Ku)^T) = \|Ku\|^2 > 0$ (question 5) et par hypothèse $1 + \langle u | (A - \epsilon I_n)^{-1} u \rangle < 0$ donc $\text{tr}((B - \epsilon I_n)^{-1}) > \text{tr}((A - \epsilon I_n)^{-1})$.

27. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable ainsi que $(A - \epsilon I_n)^{-1}$, et donc :

$$\text{tr}((A - \epsilon I_n)^{-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon} = -\frac{m}{\epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon}$$

Il en est de même de B, et par hypothèse $\mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$ donc $\text{tr}((B - \epsilon I_n)^{-1}) = -\frac{m-1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu_m - \epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon}$.

D'après la question précédente, $\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu_m - \epsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon} > \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon}$.

Mais pour tout $k \geq m+1$, $\mu_k \geq \lambda_k > \epsilon$ donc $\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon} \geq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon}$; on a donc $\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\mu_m - \epsilon} > 0$, ou encore $\frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon - \mu_m}$.

Supposons $\mu_m < \epsilon$. Cette inégalité implique alors $\epsilon - \mu_m > \epsilon$, soit encore $\mu_m < 0$. Or $\mu_m \geq \lambda_m = 0$. Cette hypothèse est donc absurde, et donc $\mu_m > \epsilon$ (on ne peut avoir $\mu_m = \epsilon$ car $B - \epsilon I_n$ est inversible).