Corrigé : polytechnique PC 2024

Partie I. Préliminaires

Question 1. Si $R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ alors $R^T R = I$ donc $(\det R)^2 = 1$, soit $\det R \in \{-1, 1\}$.

Question 2. Pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, notons M_{ij} le coefficient de rang (i,j) de M. Alors

$$\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{d} [A^T B]_{ii} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}B_{ij}$$

On reconnait le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Question 3.

a) Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,

$$\langle u \mid Av\rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^{d} u_i [Av]_i = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} u_i A_{ij} v_j = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}[uv^T]_{ij} = \langle A \mid uv^T\rangle$$

b) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}B_{ji} = \sum_{j=1}^{d} [BA]_{jj} = \operatorname{tr}(BA)$.

c) On a $\langle A \mid BC\rangle = \operatorname{tr}(A^T BC) = \operatorname{tr}\big((B^T A)^T C\big) = \langle B^T A \mid C\rangle$ et $\langle A \mid BC\rangle = \operatorname{tr}(A^T BC) = \operatorname{tr}(CA^T B) = \operatorname{tr}\big((AC^T)^T B\big) = \langle AC^T \mid B\rangle$.

Question 4.

a) Le coefficient de rang (i,i) de $R^T R$ vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} R_{ij}^2$. Or $R^T R = I$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} R_{ij}^2 = 1$, ce qui impose $|R_{ii}| \leqslant 1$.

b) $\langle D \mid R\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} D_{ij}R_{ij} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i R_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = \operatorname{tr} D$ car $\alpha_i \geqslant 0$ et $R_{ii} \leqslant 1$.

Partie II. Ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^d$

Question 5.

a) $\phi_g(a) - \phi_g(b) = R(b-a)$ et puisque R est une isométrie, $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a-b|$.

b) Posons $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Alors $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Rx + \tau = R'x + \tau'$.
Pour $x = 0$ on en déduit que nécessairement $\tau = \tau'$, et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $Rx = R'x$ si et seulement si $R = R'$.

c) Posons $e = (0, I)$. Alors $\phi_e = \mathrm{Id}$, et d'après la question précédente, il n'existe pas d'autre déplacement vérifiant cette égalité.

Question 6.

a) Posons $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{g'} \circ \phi_g(x) = R'(Rx + \tau) + \tau' = R'Rx + R'\tau + \tau' = \phi_{g''}(x)$ avec $g'' = (R'\tau + \tau', R'R)$.

b) On a $\phi_{g_1} \circ (\phi_{g_2} \circ \phi_{g_3}) = (\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}) \circ \phi_{g_3}$ donc $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$.

Question 7.

a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\phi_g(x) = y \iff Rx + \tau = y \iff x = R^{-1}(y - \tau) = R^T(y - \tau)$ donc ϕ_g est bijective, et $\phi_g^{-1}(y) = R^T y - R^T \tau$.

b) On remarque que $\phi_g^{-1} = \phi_{g'}$ avec $g' = (-R^T\tau, R^T) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

c) Puisque $\phi_e = \mathrm{Id}$, la relation $\phi_g \circ \phi_e = \phi_e \circ \phi_g = \phi_g$ se traduit par $ge = eg = g$.
De même, la relation $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \mathrm{Id} = \phi_e$ se traduit par $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Question 8. $gg' = g'g$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $R'Rx + R'\tau + \tau' = RR'x + R\tau' + \tau$.
Pour $x = 0$ ceci implique que $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$, et ainsi, $gg' = g'g$ si et seulement si $\begin{cases} R'R = RR' \\ R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau \end{cases}$.
Si $d \geqslant 2$, considérons $g = (\tau, I)$ et $g' = (0, R')$ avec $R' \neq I$. Alors $gg' = g'g$ si et seulement si $R'\tau = \tau$, et puisque $R' \neq I$, on peut toujours choisir $\tau \in \mathbb{R}^d$ tel que $R'\tau \neq \tau$ et alors $gg' \neq g'g$.
Ainsi, si $d \geqslant 2$, $\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas commutatif. En revanche, pour $d = 1$ on a nécessairement $R = R' = I$ et ainsi $\mathrm{Dep}(\mathbb{R})$ est commutatif.

Partie III. Distance à déplacement près

Question 9.

a) Soit $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $z \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\phi_g \circ \phi_{g'}(z_i) = \phi_{gg'}(z_i)$ donc $g \cdot (g' \cdot z) = (gg') \cdot z$.

b) Soit $x, y \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $x = g \cdot y$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \phi_g(y_i)$ donc $\phi_{g^{-1}}(x_i) = \phi_{g^{-1}} \circ \phi_g(y_i) = \phi_{g^{-1}g}(y_i) = \phi_e(y_i) = y_i$ et ainsi $y = g^{-1} \cdot x$.

Question 10.

a) Soit $x, y \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$. D'après la question 5a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)| = |y_i - x_i|$ donc
$\|g \cdot y - g \cdot x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2 = \|y - x\|^2$, ce qui montre que $\|g \cdot y - g \cdot x\| = \|y - x\|$.

b) D'après la question précédente, pour tout $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\|y - g \cdot x\| = \|x - g^{-1} \cdot y\|$ et $\|x - g^{-1} \cdot y\| \geqslant \delta(y, x)$ car $g^{-1} \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$.
Par définition d'une borne inférieure on en déduit que $\delta(x, y) \geqslant \delta(y, x)$ puis en inversant les rôles de x et de y que $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

c) Soit $x, y, z \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, et $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$.
D'après l'inégalité triangulaire, $\|z - g \cdot x\| \leqslant \|z - (gg') \cdot y\| + \|(gg') \cdot y - g \cdot x\| = \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$ (question 10a).

d) On en déduit que pour tout $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\delta(x, z) \leqslant \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$.
Pour g' fixée, l'application $g \mapsto gg'$ est une bijection de $\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^p)$ (d'inverse $g \mapsto gg'^{-1}$) donc on a aussi pour tout $g', g'' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\delta(x, z) \leqslant \|z - g'' \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|$.
En passant à la borne inférieure suivant g'' puis suivant g' on obtient successivement $\delta(x, z) \leqslant \delta(y, z) + \|g' \cdot y - x\|$ puis $\delta(x, z) \leqslant \delta(y, z) + \delta(x, y)$.

Question 11.

a) Soit $x, y \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ tel que $c(x) \cap c(y) \neq \varnothing$. Il existe donc $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g \cdot x = g' \cdot y$, soit $y = (g'^{-1}g) \cdot x$.
Pour tout $g'' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a alors $g'' \cdot y = (g''g'^{-1}g) \cdot x \in c(x)$ donc $c(y) \subset c(x)$, puis en inversant les rôles de x et de y, $c(x) = c(y)$.

b) Soit $x, y \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ tel que $c(x) = c(y)$.
On a $y = e \cdot y \in c(y)$ donc il existe $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $y = g \cdot x$, soit $\|y - g \cdot x\| = 0$, ce qui impose $\delta(x, y) = 0$.

Partie IV. Un problème d'optimisation

Question 12.

a) $J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) + \overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 + n|\overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x}) \;\middle|\; \overline{y} - R\overline{x} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d}$.
Or $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})\right) = 0$ donc par bilinéarité du produit scalaire, il reste $J(\tau, R) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2 + n|\overline{y} - R\overline{x} - \tau|^2$.

b) De ceci il résulte que $J(\tau, R) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2$, avec égalité si et seulement si $\tau = \overline{y} - R\overline{x} = \tau(R)$.

Question 13.

a) L'application $(\mathrm{M},\mathrm{M}') \mapsto \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}'$ définie sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est bilinéaire donc continue (la dimension est finie). L'application $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M},\mathrm{M})$ est linéaire donc continue. Par composition d'applications continues l'application $f : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

b) $\{\mathrm{I}\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{O}_d(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{I}\})$ aussi, puisque f est continue.
$\{-1,1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et le déterminant est continu donc $\left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det \mathrm{M} = \pm 1\right\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
L'intersection de deux fermés est un fermé donc $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est un fermé.
Enfin, $\mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ est borné car pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$, $\|\mathrm{M}\| = \sqrt{d}$ donc $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ est bien un fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Question 14.

a) L'application $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}\big) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - \mathrm{R}(x_i - \overline{x})|^2$ est continue donc minorée sur le fermé borné $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$. Elle atteint son minorant en au moins un $\mathrm{R}_* \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ et alors : $\forall (\tau,\mathrm{R}) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}_*),\mathrm{R}_*\big) \leqslant \mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}\big) \leqslant \mathrm{J}(\tau,\mathrm{R})$.

b) Lorsque pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, $x_i = x_1$ et $y_i = y_1$ alors $\overline{x} = x_1$ et $\overline{y} = y_1$ et pour tout $(\tau,\mathrm{R}) \in \mathrm{Dep}(\mathrm{R}^d)$, $\mathrm{J}(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}) = 0$. Le minimum (ici nul) est atteint pour tout déplacement, ce qui montre que R_* n'est pas forcément unique.

Question 15. Pour tout $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}\big) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - \mathrm{R}(x_i - \overline{x})|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{R}(x_i - \overline{x})|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \big\langle y_i - \overline{y} \;\big|\; \mathrm{R}(x_i - \overline{x})\big\rangle_{\mathbb{R}^d}$$

On a $\sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|^2 = n\mathrm{V}_n(y)$ et $\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{R}(x_i - \overline{x})|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|^2 = n\mathrm{V}_n(x)$ car R est une isométrie.
Enfin, d'après la question 3a, $\big\langle y_i - \overline{y} \;\big|\; \mathrm{R}(x_i - \overline{x})\big\rangle_{\mathbb{R}^d} = \big\langle \mathrm{R} \;\big|\; (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})^{\mathrm{T}}\big\rangle$ donc

$$\mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}\big) = n\mathrm{V}_n(x) + n\mathrm{V}_n(y) - 2\big\langle \mathrm{R} \;\big|\; \mathrm{Z}(x,y)\big\rangle \quad \text{avec } \mathrm{Z}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})^{\mathrm{T}}$$

Sachant que $\delta(x,y) = \inf\limits_{(\tau,\mathrm{R}) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)} \mathrm{J}(\tau,\mathrm{R}) = \inf\limits_{\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \mathrm{J}\big(\tau(\mathrm{R}),\mathrm{R}\big)$, on a bien $\delta(x,y) = n\mathrm{V}_n(x) + n\mathrm{V}_n(y) - 2\sup\limits_{\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \big\langle \mathrm{R} \;\big|\; \mathrm{Z}(x,y)\big\rangle$.

Partie V. Calcul de $\delta(x,y)$ dans le cas où $\det \mathrm{Z}(x,y) > 0$

Question 16. La matrice $\mathrm{S} = \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée $(u_1,\dots,u_d)$ de $\mathbb{R}^d$, et il est toujours possible d'ordonner ces vecteurs de sorte que les valeurs propres associées vérifient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_d$. En outre, $\lambda_i = \langle \lambda_i \mid u_i \rangle_{\mathbb{R}^d} = \big\langle \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}u_i \;\big|\; u_i\big\rangle_{\mathbb{R}^d} = \big\langle \mathrm{Z}u_i \;\big|\; \mathrm{Z}u_i\big\rangle_{\mathbb{R}^d} = \|\mathrm{Z}u_i\|^2 > 0$ car Z étant inversible on ne peut avoir $\mathrm{Z}u_i = 0$. Toutes les valeurs propres sont bien strictement positives.

Question 17.

a) Pour tout $i,j \in [\![1,d]\!]$, $\langle v_i \mid v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}(\mathrm{Z}u_i)^{\mathrm{T}}(\mathrm{Z}u_j) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}u_i^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}u_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}}u_i^{\mathrm{T}}u_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. la famille (v_i) est bien orthonormée. Étant de cardinal d il s'agit bien d'une base orthonormée.

b) $(u_1,\dots,u_d)$ est orthonormée donc pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}u_j = e_j$ (matrice colonne dont tous les termes sont nuls sauf le i^{e} égal à 1).
On en déduit que $\mathrm{DU}^{\mathrm{T}}u_j = \sqrt{\lambda_j}e_j$ puis que $\mathrm{VDU}^{\mathrm{T}}u_j = \sqrt{\lambda_j}v_j = \mathrm{Z}u_j$.
$(u_1,\dots,u_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$ donc $\mathrm{VDU}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Z}$.

Question 18. On a $\mathrm{Z}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on peut choisir $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour avoir $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{V}_1\mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^{\mathrm{T}}$.
On a $\mathrm{Z}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on peut choisir $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour avoir $\mathrm{Z}_2 = \mathrm{V}_2\mathrm{D}_2\mathrm{U}_2^{\mathrm{T}}$.

Question 19.

a) Si $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$, $(\mathrm{V^TRU})^\mathrm{T} = \mathrm{U^TR^TV}$ et $(\mathrm{V^TRU})^\mathrm{T}(\mathrm{V^TRU}) = \mathrm{U^TR^TVV^TRU}$.
$(v_1,\dots,v_d)$ est orthonormée donc $\mathrm{VV^T} = \mathrm{I}$; R est orthonormée donc $\mathrm{R^TR} = \mathrm{I}$; $(u_1,\dots,u_d)$ est orthonormée donc $\mathrm{U^TU} = \mathrm{I}$. Il en résulte que $(\mathrm{V^TRU})^\mathrm{T}(\mathrm{V^TRU}) = \mathrm{I}$, donc que $\mathrm{V^TRU} \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, les orientations des bases $(u_1,\dots,u_d)$ et $(v_1,\dots,v_d)$ sont identiques donc $\det \mathrm{U} = \det \mathrm{V} = \epsilon \in \{-1,1\}$. Ainsi, $\det(\mathrm{V^TRU}) = \epsilon^2 = 1$ et $\mathrm{V^TRU} \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$.

b) $\langle \mathrm{Z} \mid \mathrm{R}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{Z^TR}) = \mathrm{tr}(\mathrm{UDV^TR}) = \mathrm{tr}(\mathrm{DV^TRU}) = \langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}'\rangle$ avec $\mathrm{R}' = \mathrm{V^TRU}$.
D'après la question précédente, l'application $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{V^TRU}$ réalise une bijection de $\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc

$$\sup_{\mathrm{R}\in\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle \mathrm{Z} \mid \mathrm{R}\rangle = \sup_{\mathrm{R}'\in\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}'\rangle$$

Question 20. D'après la question 4, $\langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle \leqslant \mathrm{tr}\,\mathrm{D}$, ce majorant étant atteint pour $\mathrm{R} = \mathrm{I}$.

On a donc $\displaystyle\sup_{\mathrm{R}\in\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle \mathrm{Z} \mid \mathrm{R}\rangle = \sup_{\mathrm{R}\in\mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle = \mathrm{tr}\,\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i}$.

D'après la question 15, on a donc $\displaystyle\delta(x,y)^2 = n\mathrm{V}_n(x) + n\mathrm{V}_n(y) - 2\sum_{i=1}^{d}\sqrt{\lambda_i}$, où $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_d}$ sont les valeurs singulières de $\mathrm{Z}(x,y)$.

Partie VI. Le cas où $\det \mathrm{Z}(x,y) < 0$

Question 21.

a) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{R})$, il existe $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ tel que $\mathrm{R}x = \lambda x$. Mais $\mathrm{R} \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ donc $|\mathrm{R}x|^2 = |x|^2$, soit $\lambda^2|x|^2 = |x|^2$, et puisque $x \neq 0$, on en déduit $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda \in \{-1,1\}$.

b) $\mathrm{R} + \mathrm{I} = \mathrm{R}(\mathrm{I} + \mathrm{R}^{-1}) = \mathrm{R}(\mathrm{I} + \mathrm{R^T})$ donc $\det(\mathrm{R}+\mathrm{I}) = (\det \mathrm{R})\det(\mathrm{I}+\mathrm{R^T})$.

c) $(\mathrm{I}+\mathrm{R^T})^\mathrm{T} = \mathrm{I}+\mathrm{R}$ donc $\det(\mathrm{I}+\mathrm{R^T}) = \det(\mathrm{I}+\mathrm{R})$ (une matrice et sa transposée ont même déterminant). Ainsi, si $\det \mathrm{R} = -1$ la relation précédente donne $\det(\mathrm{R}+\mathrm{I}) = -\det(\mathrm{R}+\mathrm{I})$, soit $\det(\mathrm{R}+\mathrm{I}) = 0$.

Question 22.

a) La question précédente a montré que -1 est valeur propre de R : il existe donc un vecteur unitaire u_d tel que $\mathrm{R}u_d = -u_d$. En considérant une base orthonormée $(u_1,\dots,u_{d-1})$ de l'hyperplan $\mathrm{E}_1 = \{u_d\}^\perp$ on construit une base orthonormée vérifiant : $\forall x \in \mathrm{E}_1$, $u_d^\mathrm{T}x = 0$. Or $\mathrm{R}u_d = -u_d \iff u_d = -\mathrm{R}^{-1}u_d = -\mathrm{R^T}u_d$ donc $(-\mathrm{R^T}u_d)^\mathrm{T}x = 0$, soit encore $u_d^\mathrm{T}\mathrm{R}x = 0$.

b) Ceci prouve que pour tout $x \in \mathrm{E}_1$, $\mathrm{R}x \in \{u_d\}^\perp = \mathrm{E}_1$, autrement dit que $\mathrm{R}(\mathrm{E}_1) \subset \mathrm{E}_1$. En outre, R est inversible donc $\dim \mathrm{R}(\mathrm{E}_1) = \dim \mathrm{E}_1$, ce qui implique $\mathrm{R}(\mathrm{E}_1) = \mathrm{E}_1$.

Question 23.

a) $(u_1,\dots,u_d)$ est orthonormée donc $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\langle \mathrm{S} \mid \mathrm{R}'\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S^TR}) = \mathrm{tr}(\mathrm{U^TDUU^TRU}) = \mathrm{tr}(\mathrm{U^TDRU}) = \mathrm{tr}(\mathrm{UU^TDR}) = \mathrm{tr}(\mathrm{DR}) = \langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle$$

b) Puisque $\mathrm{R}u_d = -u_d$ et $\mathrm{R}(\mathrm{E}_1) = \mathrm{E}_1$ on a $\mathrm{R}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{R}_0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$ (formule de changement de base).

De plus, R' est orthogonale (car produit de matrices orthogonales) donc $\mathrm{R}_0 \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$. Et de plus $\det \mathrm{R} = \det \mathrm{R}' = -1$ donc $\mathrm{R}_0 \in \mathcal{SO}_{d-1}(\mathbb{R})$.

Question 24.

a) $\langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle = \langle \mathrm{S} \mid \mathrm{R}'\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S^TR}') = \mathrm{tr}(\mathrm{SR}')$ car S est symétrique. Un calcul par blocs donne $\mathrm{SR}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{S}_0\mathrm{R}_0 & \times \\ \hline \times & -\mathrm{S}_{dd} \end{array}\right)$ donc $\langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S}_0\mathrm{R}_0) - \mathrm{S}_{dd}$.

b) S_0 est symétrique réelle donc il existe $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$ et Δ diagonale telles que $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q^T}$. On a alors $\mathrm{tr}(\mathrm{S}_0\mathrm{R}_0) = \mathrm{tr}(\mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q^T}\mathrm{R}_0) = \mathrm{tr}(\Delta\mathrm{R}_0')$ avec $\mathrm{R}_0' = \mathrm{Q^T}\mathrm{R}_0\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.
Pour appliquer la question 4b et conclure que $\mathrm{tr}(\mathrm{S}_0\mathrm{R}_0) \leqslant \mathrm{tr}\,\Delta = \mathrm{tr}\,\mathrm{S}_0$, il nous faut montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}_0) \subset \mathbb{R}_+$, autrement dit que $\mathrm{S}_0 \in \mathcal{S}_{d-1}^+(\mathbb{R})$. Pour se faire, considérons $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ et formons le vecteur $y \in \mathbb{R}^d$ en rajoutant à x une dernière composante égale à 0. Alors $x^\mathrm{T}\mathrm{S}_0x = y^\mathrm{T}\mathrm{S}y \geqslant 0$ car $\mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}_+$. On a donc bien $\mathrm{tr}(\mathrm{S}_0\mathrm{R}_0) \leqslant \mathrm{tr}\,\mathrm{S}_0$

c) S est semblable à D donc $\mathrm{tr}\,\mathrm{D} = \mathrm{tr}\,\mathrm{S} = \mathrm{tr}\,\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_{dd}$. Ainsi, $\langle \mathrm{D} \mid \mathrm{R}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S}_0\mathrm{R}_0) - \mathrm{S}_{dd} \leqslant \mathrm{tr}(\mathrm{S}_0) - \mathrm{S}_{dd} = \mathrm{tr}\,\mathrm{D} - 2\mathrm{S}_{dd}$.

Question 25.

a) $S = U^T DU$ donc $S_{dd} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} U_{id} D_{ij} U_{jd} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2$.

b) On en déduit que $S_{dd} \geqslant \sum_{j=1}^{d} \alpha_d U_{jd}^2 = \alpha_d$ car $U \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$. De plus, $\operatorname{tr} D = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$ donc $\langle D \mid R\rangle \leqslant \sum_{j=1}^{d} \alpha_j - 2\alpha_d = \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j - \alpha_d$.

Question 26. Posons $S = Z^T Z$ avec $Z = Z(x, y)$. Les questions 16 et 17 s'appliquent toujours, mais cette fois la question 19 donne :

$$\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z \mid R\rangle = \sup_{R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D \mid R\rangle$$

La question précédente prouve que $\sup_{R \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D \mid R\rangle \leqslant \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j - \alpha_d$ (avec ici $\alpha_j = \sqrt{\lambda_j}$), ce majorant étant atteint pour $R = \left(\begin{array}{c|c} I_{d-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$.

On a donc $\sup_{R \in \mathcal{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z \mid R\rangle = \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_n}$ et donc $\delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2\sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_j} + 2\sqrt{\lambda_n}$ où les $\sqrt{\lambda_j}$ sont les valeurs singulières de $Z(x, y)$, ordonnées par valeurs décroissantes.