Transformation d'Euler (X MP 2011 – extrait)

Durée : libre

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles, et on considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in/\mathrm{N}}$ associie la suite Δu de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$.

Partie I. Suites complètement monotones

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$, et par convention Δ^0 est l'identité de E.
On dit qu'une suite (u_n) de E est *complètement monotone* si pour tous entiers naturels p et n on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0.$$

Question 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On considère la suite de terme général $u_n = f(n)$.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel x dans l'intervalle $]n, n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f'(x)$.

b) Montrer plus généralement que pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout entier n il existe un réel x dans l'intervalle $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$

On pourra raisonner par récurrence sur p en considérant la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et la suite de terme général $v_n = g(n)$.

Question 2. On considère la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrer que la suite (a_n) est complètement monotone.

Question 3. Démontrer que pour tout $p \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

On pourra introduire l'endomorphisme δ de E qui à une suite $u = (u_n)$ associe la suite δu de terme général $(\delta u)_n = u_{n+1}$.

Question 4. Soit $b \in]0,1[$. On considère la suite de terme général $b_n = b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous entiers naturels n et p et en déduire que la suite (b_n) est complètement monotone.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \omega(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 5.

a) Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^k u_k$.

b) Prouver ensuite que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Question 6. Montrer que la suite (u_n) est complètement monotone.

(la suite au verso)

Partie II. Transformée d'Euler

Dans cette partie, on considère une suite réelle (u_n) telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite (u_n).** Le but de cette partie est de démontrer que :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

On dit que la série $\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ est la *transformée d'Euler* de la série $\sum (-1)^k u_k$.

Question 7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

Question 8. Montrer que pour toute suite (r_n) de limite nulle on a $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k = 0$. *On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.*

Question 9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right)$$

Question 10.

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et n on a $2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_n \right)$$

Question 11.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$. Montrer que

$$\mathrm{S} - \mathrm{E}_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k.$$

b) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ converge et que sa somme est égale à S.

Question 12.

a) En appliquant la question 5 à une fonction ω judicieusement choisie, montrer que $\ln 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$.

b) En déduire que $\ln 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$.

♦ ♦
♦