Corrigé : transformation d'Euler (X MP 2011 – extrait)

Partie I. Suites complètement monotones

Question 1.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n)$; f étant de classe $\mathscr{C}^1$ on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis : il existe $x \in]n, n+1[$ tel que $f(n+1) - f(n) = f'(x)$.

b) Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

– le cas $p = 1$ a été traité à la question précédente.

– Si $p \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $p-1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ ainsi que la suite (v_n) de terme général $v_n = g(n)$. g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $y \in]n, n+p-1[$ tel que $(\Delta^{p-1} v)_n = g^{(p-1)}(y)$.

Mais d'une part $v = \Delta u$ donc $\Delta^{p-1} v = \Delta^p u$ et d'autre part $g^{(p-1)}(y) = f^{(p-1)}(y+1) - f^{(p-1)}(y)$ donc d'après l'égalité des accroissements finis il existe $x \in]y, y+1[$ tel que $g^{(p-1)}(y) = f^{(p)}(x)$.

On a $n < y < n+p-1$ et $y < x < y+1$ donc $n < x < n+p$; le résultat est bien acquis au rang p, la récurrence se propage.

Question 2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. Cette fonction des de classe $\mathscr{C}^\infty$ et il est aisé de prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $x > 0$, $f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$.

D'après la question précédente, pour tout p et n dans $\mathbb{N}$ il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p a)_n = f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$ donc $(-1)^p (\Delta^p u)_n = \dfrac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$, ce qui prouve que la suite (a_n) est complètement monotone.

Question 3. Considérons l'endomorphisme δ de E qui à toute suite (u_n) de E associe la suite de terme général $(\delta u)_n = u_{n+1}$. On a $\Delta = \delta - \mathrm{Id}_E$ donc d'après la formule du binôme, $\Delta^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \delta^k$. Or à l'évidence $(\delta^k u)_n = u_{n+k}$ donc $(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}$ et ainsi, $(-1)^p (\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k}$.

Question 4. D'après la question précédente, $(-1)^p (\Delta^p b)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k b^{n+k} = b^n (1-b)^p$. Il en résulte que si $b \in]0,1[$ la suite (b^n) est complètement monotone.

Question 5.

a) Puisque ω est à valeurs positives, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, $t^{n+1}\omega(t) \leqslant t^n \omega(t)$ ce qui donne en intégrant : $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

De plus, ω est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée : en notant M sa borne supérieure on a $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M} \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{n+1}$ donc $\lim u_n = 0$.

On peut donc appliquer le critère spécial relatif aux séries alternée pour conclure : la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

b) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^1 \omega(t) \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{\omega(t) t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t) t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M} \int_0^1 t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{n+2}$ et en passant à la limite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

Question 6. D'après la formule établie à la question 3 on a

$$(-1)^p (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k} = \int_0^1 t^n \omega(t) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

De plus, si on avait $(-1)^p (\Delta^p u)_n = 0$ ceci signifierait que pour tout $t \in]0,1[$, $\omega(t) = 0$, ce qui n'est pas possible car ω est supposée non identiquement nulle. On peut conclure : la suite (u_n) est complètement monotone.

Partie II. Transformée d'Euler

Question 7. D'après la formule établie à la question 3, $(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} u_{n+k}$. Lorsque l'entier p est fixé, il s'agit d'une combinaison linéaire *finie* de suites qui toutes tendent vers 0 (en effet, $\sum (-1)^n u_n$ converge donc $\lim u_n = 0$), donc $\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

Question 8. Considérons un réel $\epsilon > 0$; par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|r_k| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour tout $p \geqslant \mathrm{N}$,

$$\Big|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k\Big| \leqslant \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\binom{p}{k}|r_k| + \frac{\epsilon}{2^p}\sum_{k=\mathrm{N}}^{p}\binom{p}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{2^p}\binom{p}{k}|r_k| + \frac{\epsilon}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{2^p}\binom{p}{k}|r_k| + \epsilon$$

Pour $k \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$ fixé, considérons la suite $\alpha_p = \frac{1}{2^p}\binom{p}{k}$. On calcule $\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \frac{p+1}{2(p+1-k)}$ donc $\lim_{p\to+\infty}\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \frac{1}{2} < 1$ et d'après le critère de d'Alembert, $\lim \alpha_p = 0$.

Ceci montre que $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{2^p}\binom{p}{k}|r_k| = 0$. Il existe donc un rang $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ à partir duquel $\Big|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k\Big| \leqslant 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$.

Question 9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par télescopage, $\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\frac{(-1)^k}{2^k}(\Delta^k u)_n - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(\Delta^{k+1}u)_n\Big) = (\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n = u_n - \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n$.

Il s'agit donc de montrer que $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n = 0$. Or d'après la question 3, $\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}u_{n+k}$ et puisque la série $\sum(-1)^n u_n$ converge la suite (u_n) tend vers 0. Ainsi, à n fixé, $\lim_{k\to+\infty}(-1)^k u_{n+k} = 0$. On peut donc appliquer la question 8 et conclure : $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n = 0$.

Question 10.

a) On a $\Delta^{p+1}u = \Delta(\Delta^p u)$ donc $(\Delta^{p+1}u)_n = (\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n$. Ainsi, $2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n = (\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}$.

b) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\Big) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n\Big(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n\Big) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n\Big((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}\Big).$$

Par télescopage, $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n\Big((\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}\Big) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\Big((-1)^n(\Delta^p u)_n - (-1)^{n+1}(\Delta^p u)_{n+1}\Big) = (\Delta^p u)_0 - (-1)^{\mathrm{N}+1}(\Delta^p u)_{\mathrm{N}+1}$.

Or d'après la question 7, $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}(\Delta^p u)_{\mathrm{N}+1} = 0$ donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\Big) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$$

Question 11.

a) Sachant qu'une somme finie de séries convergentes est convergente, la question précédente permet d'écrire :

$$\mathrm{E}_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)$$

La question 9 nous permet en outre d'écrire : $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)$.

Ainsi, $\mathrm{S}-\mathrm{E}_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)$.

Nous avons déjà montré à la question 9 que $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k=0$ donc par télescopage

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k-0$$

et $\mathrm{S}-\mathrm{E}_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k$. En appliquant la formule de la question 3, il vient enfin :

$$\mathrm{S}-\mathrm{E}_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}(-1)^p u_{k+p}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+p}u_{k+p}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k$$

b) Il s'agit maintenant de faire tendre n vers $+\infty$. Pour se faire, on pose $r_p=\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k$. S'agissant du reste d'une série convergente on a $\lim_{p\to+\infty}r_p=0$ donc on peut appliquer la question 8 et conclure : $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}-\mathrm{E}_n=0$, ce qui prouve que la suite (E_n) converge et donc que $\mathrm{S}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$.

Question 12.

a) Appliquons la question 5 à la fonction $\omega : t\mapsto 1$. On a $u_n=\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$ et $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln 2$ donc $\ln 2=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k}$.

b) Appliquons maintenant le résultat établi dans cette partie : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$.

Il reste à appliquer la formule de la question 3 :

$$\begin{aligned}(-1)^p(\Delta^p u)_0&=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k u_k=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p+1}{k+1}\\&=\frac{1}{p+1}\left(1-\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{p+1}{k}\right)=\frac{1}{p+1}\left(1-(1-1)^{p+1}\right)=\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

et ainsi, $\ln 2=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$.