

# POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV ORTHOGONAUX

Durée : libre

Dans tout le problème,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  des applications continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On conviendra de confondre un polynôme avec la fonction polynomiale associée.

## Première partie

On définit par récurrence une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à l'aide des relations :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

**Question 1.** Déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le degré, la parité, et le coefficient dominant de  $T_n$ .

**Question 2.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  on a :  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

**Question 3.** Déterminer les racines du polynômes  $T_n$ , en précisant leurs multiplicités respectives.

**Question 4.** Montrer que pour tout  $f \in E$ , la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$ .

Étant donné deux éléments  $f$  et  $g$  de  $E$ , on peut donc définir :  $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

**Question 5.** Montrer que ceci définit un produit scalaire sur  $E$ . On notera  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

**Question 6.** Étant donné  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $\langle T_p | T_q \rangle$  (on distinguera les cas  $p \neq q$ ,  $p = q \neq 0$ , et  $p = q = 0$ ).

**Question 7.** Réciproquement, montrer que si  $(P_n)$  est une suite de polynômes *unitaires* (autrement dit de coefficient dominant égal à 1) vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg P_n &= n \\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \neq q &\Rightarrow \langle P_p | P_q \rangle = 0 \end{aligned}$$

alors  $P_0 = T_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ .

## Deuxième partie

Soit  $f \in E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_n(f) = \frac{\langle f | T_n \rangle}{\langle T_n | T_n \rangle}$  et  $P_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k(f) T_k$ .

**Question 8.** Montrer que pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $P_n(Q) = Q$ .

**Question 9.** Soit  $f \in E$ . Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a :  $\|f - P_n(f)\| \leq \|f - Q\|$ . Dans quel cas a-t-on égalité ?

**Question 10.** On admet l'existence d'une suite de polynômes  $(P_n)$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ . Prouver alors que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n(f)\| = 0$ .

**Question 11.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n(f)\|^2 = \|f\|^2$ .

En déduire que la suite  $\left( \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et que :

$$2c_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

**Question 12.** *Application.* On pose dans cette question uniquement :  $\forall t \in [-1, 1], f(t) = \sqrt{1-t^2}$ .

Appliquer la formule précédente et en déduire la valeur de la somme :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ .

### Troisième partie

Dans cette partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$ , et on note  $x_0 = \cos \theta_0, x_1 = \cos \theta_1, \dots, x_n = \cos \theta_n$  les racines de  $T_{n+1}$ , avec  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi$ .

**Question 13.** Montrer l'existence d'une unique famille  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k). \quad (1)$$

*Indication :* on pourra faire intervenir les polynômes d'interpolation de Lagrange.

**Question 14.** En effectuant une division euclidienne par le polynôme  $T_{n+1}$ , montrer que l'égalité (1) est en fait valable pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ .

**Question 15.** Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{T'_{n+1}(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(t)}{(t-x_k)\sqrt{1-t^2}} dt$ .

**Question 16.** Dans cette question, on fixe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et on pose pour tout  $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $\alpha_j = \int_0^\pi \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos \theta - \cos \theta_k} d\theta$ .

Justifier avec soin l'existence de cette intégrale, puis calculer  $\alpha_{j+1} - 2 \cos(\theta_k) \alpha_j + \alpha_{j-1}$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Question 17.** En déduire la valeur de  $\alpha_{n+1}$ , puis celle de  $\lambda_k$ .