

CORRIGÉ : POLYNÔMES DE TSCHEBYCHEV ORTHOGONAUX

Première partie

Question 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que T_n est de degré n , a même parité que n (autrement dit que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$), et son coefficient dominant vaut 2^{n-1} .

- C'est clair si $n = 1$ ou $n = 2$, car $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
- Si $n \geq 3$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors :
 - $\deg XT_{n-1} = n$ et $\deg T_{n-2} = n-2$, donc $\deg T_n = n$;
 - par hypothèse de récurrence, $T_{n-1}(-X) = (-1)^{n-1} T_{n-1}(X)$ et $T_{n-2}(-X) = (-1)^{n-2} T_{n-2}(X)$, donc :

$$T_n(-X) = 2(-X)T_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = 2X(-1)^n T_{n-1}(X) - (-1)^n T_{n-2}(X) = (-1)^n T_n(X)$$

- enfin, le coefficient dominant de XT_{n-1} est égal à 2^{n-1} ; c'est donc aussi celui de T_n .

La récurrence se propage.

Question 2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$.

- C'est clair si $n = 0$ ou $n = 1$.
- Si $n \geq 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Dans ces conditions :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta \quad (\text{car } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2})$$

La récurrence se propage.

Question 3. Posons $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $T_n(x_k) = 0$, et x_0, \dots, x_{n-1} sont des racines distinctes de T_n . Étant de degré n , il n'en possède pas d'autres, et ces racines sont toutes simples.

Question 4. La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée. Ainsi,

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \left| \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $]-1, 1[$ car $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin b - \arcsin a \xrightarrow[a \rightarrow -1]{b \rightarrow 1} \pi$; on en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$.

Question 5. La linéarité, la symétrie, et la positivité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sont évidentes. Considérons $f \in E$ tel que $\langle f | f \rangle = 0$, soit : $\int_{-1}^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$. La fonction f étant continue on en déduit que pour tout $t \in]-1, 1[$, $f(t) = 0$, égalité que l'on prolonge sur $[-1, 1]$ par continuité.

Question 6. Effectuons le changement de variable $t = \cos \theta$. Alors :

$$\langle T_p | T_q \rangle = \int_0^\pi T_p(\cos \theta) T_q(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta) d\theta$$

- Si $p \neq q$, alors $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$, donc $\langle T_p | T_q \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)\theta}{p+q} + \frac{\sin(p-q)\theta}{p-q} \right]_0^\pi = 0$.
- Si $p = q \neq 0$, alors $p+q \neq 0$, et $\langle T_p | T_q \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p+q)\theta}{p+q} + \theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.
- Si $p = q = 0$, alors $\langle T_0 | T_0 \rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi$.

Question 7. Le procédé de Schmidt appliqué à la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ montre l'existence d'une unique famille orthonormée $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \text{Vect}(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$;
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \langle X^n | Q_n \rangle > 0$.

La condition (i) implique immédiatement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg Q_n = n$. On notera en outre que pour tout $n \geq 1$, Q_n est orthogonal à $\text{Vect}(Q_0, \dots, Q_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Désignons par α_n le coefficient dominant de Q_n . On a $(Q_n - \alpha_n X^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\langle Q_n | Q_n - \alpha_n X^n \rangle = 0$, ce qui montre que $\alpha_n \langle X^n | Q_n \rangle = \|Q_n\|^2 > 0$ et donc que $\alpha_n > 0$.

On en déduit (de par l'unicité de la suite (Q_n)) : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{T_n}{\|T_n\|} = Q_n$ et $\frac{P_n}{\|P_n\|} = Q_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $\lambda_n > 0$ tel que $P_n = \lambda_n T_n$, et la considération du coefficient dominant donne $P_0 = T_0$ et $P_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ pour $n \geq 1$.

Deuxième partie

Question 8. (T_0, T_1, \dots, T_n) étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$Q = \sum_{j=0}^n a_j T_j. \text{ Alors } \langle Q | T_k \rangle = \sum_{j=0}^n a_j \langle T_j | T_k \rangle = a_j \langle T_k | T_k \rangle, \text{ donc } a_k = c_k(Q), \text{ et } Q = \sum_{k=0}^n c_k(Q) T_k = P_n(Q).$$

Question 9. On constate que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle P_n(f) | T_k \rangle = c_k(f) \langle T_k | T_k \rangle = \langle f | T_n \rangle$, soit : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle f - P_n(f) | T_k \rangle = 0$. (T_0, \dots, T_n) étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $f - P_n(f)$ est donc orthogonal à ce sous-espace vectoriel ; $P_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$. $f - P_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ et $P_n(f) - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\langle f - P_n(f) | P_n(f) - Q \rangle = 0$ et d'après le théorème de Pythagore,

$$\|f - Q\|^2 = \|f - P_n(f) + P_n(f) - Q\|^2 = \|f - P_n(f)\|^2 + \|P_n(f) - Q\|^2.$$

Ainsi, $\|f - P_n(f)\| \leq \|f - Q\|$, avec égalité si et seulement si $Q = P_n(f)$.

Question 10. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ donc parmi eux se trouvent des polynômes vérifiant : $\|f - Q\|_\infty \leq \epsilon$. Considérons en un, et notons N son degré.

$$\text{Alors : } \|f - P_N(f)\| \leq \|f - Q\| = \left| \int_{-1}^1 \frac{f(t) - Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \int_{-1}^1 \frac{\|f - Q\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \|f - Q\|_\infty \leq \pi \epsilon.$$

Par ailleurs, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n-1}(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\|f - P_n(f)\| \leq \|f - P_{n-1}(f)\|$; la suite $(\|f - P_n(f)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et donc : $\forall n \geq N, \|f - P_n(f)\| \leq \pi \epsilon$.

Si on récapitule, on a montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \implies \|f - P_n(f)\| \leq \pi \epsilon ;$$

ce qui signifie que la suite $(\|f - P_n(f)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 11. D'après le théorème de Pythagore, $\|f\|^2 = \|P_n(f)\|^2 + \|f - P_n(f)\|^2$, donc, puisque $\lim_{+\infty} \|f - P_n(f)\| = 0$, on a bien : $\lim_{+\infty} \|P_n(f)\|^2 = \|f\|^2$.

$$\text{La famille } (T_n) \text{ étant orthogonale, on a : } \|P_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 \|T_k\|^2 = \pi c_0(f)^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n c_k(f)^2.$$

On en déduit que la série $\sum c_k(f)^2$ converge, et en passant à la limite :

$$2c_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)^2 = \frac{2}{\pi} \|f\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Question 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle f | T_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta) d\theta,$$

$$\text{donc } \langle f | T_n \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n-1} \cos(n-1)\theta - \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta \right]_0^\pi = -\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \right) \text{ si } n \neq 1, \text{ et } \langle f | T_1 \rangle = 0.$$

Ainsi, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $c_{2p}(f) = \frac{-4}{\pi(4p^2 - 1)}$, $c_{2p-1}(f) = 0$ et $c_0(f) = \frac{2}{\pi}$.

Par ailleurs, $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = 1$, et la formule de la question 11 donne :

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4p^2 - 1)^2} = 1 \iff \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Troisième partie

Question 13. Considérons les polynômes d'interpolation de Lagrange L_0, \dots, L_n aux points x_0, \dots, x_n . On sait que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$, donc $\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$, avec $\lambda_k = \int_{-1}^1 \frac{L_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

L'unicité se justifie en appliquant cette égalité avec $P = L_k$, qui fournit la valeur de λ_k .

Question 14. Si $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, effectuons la division euclidienne de P par T_{n+1} : $P = QT_{n+1} + R$, avec $\deg R \leq n$ et $\deg Q \leq n$. On a d'une part :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \langle Q | T_{n+1} \rangle + \int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{car } T_{n+1} \in \text{Vect}(T_0, \dots, T_n)^\perp = \mathbb{R}_n[X]^\perp$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k R(x_k) \quad \text{car } T_{n+1}(x_k) = 0.$$

La formule (1) étant vraie pour le polynôme R , ces égalités montrent qu'elle reste vraie pour le polynôme P .

Question 15. Sachant que $T_{n+1} = 2^n \left(\prod_{j \neq k} (x_k - x_j) \right) (X - x_k)L_k = T'_{n+1}(x_k)(X - x_k)L_k$, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{x_k\}, \quad L_k(t) = \frac{T_{n+1}(t)}{T'_{n+1}(x_k)(t - x_k)},$$

cette égalité se prolongeant par continuité en x_k . Ainsi, $\lambda_k = \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(t)}{T'_{n+1}(x_k)(t - x_k)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Question 16. Au voisinage de θ_k , on a $\cos \theta - \cos \theta_k \underset{\theta_k}{\sim} (\theta_k - \theta) \sin \theta_k$ et $\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k) \underset{\theta_k}{\sim} j(\theta_k - \theta) \sin(j\theta_k)$, donc :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos \theta \cos \theta_k} = j.$$

α_j apparaît donc comme l'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, \pi]$, et est en conséquence bien défini.

L'égalité : $\cos(j+1)\phi + \cos(j-1)\phi = 2\cos(j\phi)\cos\phi$ conduit à :

$$\alpha_{j+1} - 2(\cos \theta_k)\alpha_j + \alpha_{j-1} = \int_0^\pi 2\cos(j\theta) d\theta = 0.$$

Question 17. La suite (α_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est : $X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1 = (X - e^{i\theta_k})(X - e^{-i\theta_k})$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j = \lambda \cos(j\theta_k) + \mu \sin(j\theta_k).$$

Sachant que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = \pi$, on trouve : $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\pi}{\sin \theta_k}$. Ainsi, $\alpha_{n+1} = \pi \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin \theta_k}$.

Par ailleurs, le changement de variable $t = \cos \theta$ dans l'égalité de la question 15 donne :

$$\lambda_k = \frac{1}{T'_{n+1}(\cos \theta_k)} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k} d\theta = \frac{1}{T'_{n+1}(\cos \theta_k)} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} d\theta$$

(car $\cos(n+1)\theta_k = T_{n+1}(\cos \theta_k) = T_{n+1}(x_k) = 0$). Ainsi, $\lambda_k = \frac{\alpha_{n+1}}{T'_{n+1}(\cos \theta_k)}$.

La dérivation de l'égalité : $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n+1)\theta$ apporte : $T'_{n+1}(\cos \theta) = (n+1) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$, puis :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n+1}.$$

Ainsi, on a démontré : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n P(x_k)$.