Familles d'endomorphismes co-diagonalisables

Durée : libre

Notations

On considère dans tout le problème un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. On note Id_E l'application identique de E dans E et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$ et I_n la matrice unité d'ordre n.
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est *stable* par u si $u(F) \subset F$.

Partie I.

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Question 1. Montrer qu'il existe une base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ de E sur laquelle la matrice de u est diagonale.

Question 2. Soit v un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_k) = \mu_k e_k$.

b) Justifier l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(\lambda_k) = \mu_k.$$

c) En déduire l'existence d'un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n vérifiant : $v = P(u)$.

Question 3. On considère le *commutant* de u, c'est à dire : $\mathcal{C}(u) = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; u \circ v = v \circ u \right\}$.

a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- *(i)* $v \in \mathcal{C}(u)$;
- *(ii)* il existe une base de E sur laquelle les matrices associées à u et v sont diagonales ;
- *(iii)* il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $v = P(u)$.

b) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Quelle est sa dimension ?

Question 4. Application

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) On se propose de chercher les matrices B telles que $B^3 = A \quad (1)$.
Montrer que si B vérifie (1), alors $AB = BA$. En déduire les solutions de (1).

c) Si $\{B_1, \ldots, B_m\}$ est l'ensemble des solutions de (1), calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} B_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} B_k$.

Partie II.

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ désigne un ensemble non vide d'endomorphismes de E vérifiant :

$$(H) \qquad \begin{cases} (i) & \text{tout élément de } \mathscr{U} \text{ est diagonalisable ;} \\ (ii) & \forall (u, v) \in \mathscr{U}^2,\ u \circ v = v \circ u. \end{cases}$$

Question 5. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ des endomorphismes de E dont la matrice dans (e) est diagonale vérifie les hypothèses (H).

Question 6. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$, stable par u.

a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F et $e_{p+1}, \dots, e_n$ des vecteurs propres de u.

b) On note $\mathrm{F}' = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, et u_F et $u_{\mathrm{F}'}$ les restrictions de u à F et F′, respectivement.
Justifier le fait que u_F et $u_{\mathrm{F}'}$ définissent des endomorphismes de F et F′, respectivement.

Si α est valeur propre de u, montrer que : $\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}(u_\mathrm{F} - \alpha \mathrm{Id}_\mathrm{F}) \oplus \mathrm{Ker}(u_{\mathrm{F}'} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{F}'})$.

c) En déduire que u_F est diagonalisable.

Question 7. Soit $\mathscr{U}$ un ensemble d'endomorphismes de E vérifiant les hypothèses (H). On se propose de démontrer par récurrence sur n qu'il existe une base de E sur laquelle tous les éléments de $\mathscr{U}$ ont une matrice diagonale.

a) Traiter le cas $n = 1$.

b) On suppose $n \geqslant 2$ et la propriété vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que si $u \in \mathscr{U}$ alors chaque sous-espace propre de u est stable par tous les éléments de $\mathscr{U}$, et conclure.

Question 8. Application

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et B soient diagonalisables et vérifient $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

a) Montrer l'existence d'une matrice inversible P telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient diagonales.

b) On pose $\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P} & -\mathrm{P} \\ \hline \mathrm{P} & \mathrm{P} \end{array}\right)$ et $\mathrm{Q}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}^{-1} & \mathrm{P}^{-1} \\ \hline -\mathrm{P}^{-1} & \mathrm{P}^{-1} \end{array}\right)$. Calculer QQ', et en déduire Q^{-1}.

c) Montrer que la matrice $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{A} \end{array}\right)$ est diagonalisable.