# Corrigé : familles d'endomorphismes co-diagonalisables

## Partie I.

**Question 1.** Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons $e_k$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est libre et puisqu'elle est de cardinal $n$, elle constitue une base pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale.

**Question 2.**

*a)* On calcule $u(v(e_k)) = u \circ v(e_k) = v \circ u(e_k) = v(\lambda_k e_k) = \lambda_k v(e_k)$. Ainsi, $v(e_k) \in \mathrm{E}_{\lambda_k}(u) = \mathrm{Vect}(e_k)$ donc il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_k) = \mu_k e_k$.

*b)* Considérons la famille $(\mathrm{L}_1,\cdots,\mathrm{L}_n)$ des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, et posons $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathrm{L}_k$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(\lambda_k) = \mu_k$ et puisque $(\mathrm{L}_1,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, ce polynôme est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant ces relations.

*c)* Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $v(e_k) = \mu_k e_k$ et $\mathrm{P}(\lambda_k)e_k = \mathrm{P}(u)(e_k)$. Puisque $(e)$ est une base, $v = \mathrm{P}(u)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(\lambda_k) = \mu_k$, et la question précédente a justifié l'existence d'un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ vérifiant ces relations.

**Question 3.**

*a)* Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ :

Soit $(e)$ une base formée de vecteurs propres de $u$. D'après la question 2a, ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de $v$ donc les matrices $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(v)$ sont toutes deux diagonales.

Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ :

Soit $(e)$ une base pour laquelle les matrices $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(v)$ sont diagonales, et posons $u(e_k) = \lambda_k e_k$, $v(e_k) = \mu_k e_k$.
D'après la question 2b, il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(\lambda_k) = \mu_k$, et d'après la question 2c, on a alors $v = \mathrm{P}(u)$.

Enfin, montrons l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ :

Soit $(e)$ une base formée de vecteurs propres de $u$. Si $v = \mathrm{P}(u)$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $v(e_k) = \mathrm{P}(\lambda_k)e_k$ donc $(e)$ est une base sur laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(v)$ est diagonale, ce qui prouve l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$.

*b)* L'application $\phi : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ définie par $\phi(v) = u \circ v - v \circ u$ est à l'évidence linéaire, donc $\mathcal{C}(u) = \mathrm{Ker}\,\phi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
D'après la question précédente, $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, u,\ldots,u^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{C}(u)$. Si elle était liée, il existerait un polynôme non nul P de degré strictement inférieur à $n$ pour lequel $\mathrm{P}(u) = 0$. Mais on aurait alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{P}(\lambda_k) = 0$ et P posséderait $n$ racines distinctes, ce qui est absurde.
On en déduit que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, u,\ldots,u^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(u)$, qui est donc de dimension $n$.

**Question 4.**

*a)* On calcule le polynôme caractéristique de A : $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$.

On résout : $\mathrm{AX} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{AX} = \mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{AX} = 2\mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Posons $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}-4 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ; alors $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

*b)* Si $\mathrm{B}^3 = \mathrm{A}$ alors $\mathrm{AB} = \mathrm{B}^4 = \mathrm{BA}$ donc B appartient au commutant de A. D'après le point $(ii)$ de la question 3b, B se diagonalise sur la même base que A, donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}$. Mais alors : $\mathrm{B}^3 = \mathrm{A} \iff \begin{cases}\lambda^3 = 0\\ \mu^3 = 1\\ \nu^3 = 2\end{cases}$ donc les solutions de cette équation sont de la forme : $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega'\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $(\omega,\omega') \in \{1, j, \bar{j}\}^2$, soit $B = \omega U + \omega'\sqrt[3]{2}V$, où U et V sont deux matrices de projecteurs vérifiant :

$$\begin{cases} A = U + 2V \\ A^2 = U + 4V \end{cases} \iff \begin{cases} U = 2A - A^2 \\ V = \dfrac{1}{2}(A^2 - A) \end{cases}$$

ce qui conduit après calculs à :

$$B = \omega\begin{pmatrix} -4 & 8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \omega'\sqrt[3]{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 12 \\ 3/2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*c)* Nous avons obtenu 9 solutions distinctes ; somme et produit valent :

$$\sum_{k=1}^{9} B_k = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3(1+j+\bar{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 3(1+j+\bar{j})\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}P^{-1} = 0\,;$$

$$\prod_{k=1}^{9} B_k = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 \times j^3 \times \bar{j}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \times j^3 \times \bar{j}^3 \times (\sqrt[3]{2})^9 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}P^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 20 & -24 & 76 \\ 12 & -16 & 48 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

# Partie II.

**Question 5.** Toute matrice diagonale est diagonalisable (sic) et deux matrices diagonales commutent donc $\mathscr{D}$ vérifie les hypothèses (H).

**Question 6.**

*a)* Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F et $(e'_1,\dots,e'_n)$ une base formée de vecteurs propres de $u$. La famille $(e_1,\dots,e_p)$ est libre et la famille $(e'_1,\dots,e'_n)$ génératrice, donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(e_1,\dots,e_p)$ par des éléments de $(e'_1,\dots,e'_n)$ pour former une base $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. De la sorte, $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de F et $e_{p+1},\dots,e_n$ des vecteurs propres de $u$.

*b)* F et F′ sont stables par $u$, donc $u_F$ et $u_{F'}$ définissent des endomorphismes induits, respectivement sur F et F′.

Notons déjà que $F \cap F' = \{0_E\}$ donc $\operatorname{Ker}(u_F - \mathrm{Id}_F) \cap \operatorname{Ker}(u_{F'} - \mathrm{Id}_{F'}) = \{0_E\}$ : la somme $\operatorname{Ker}(u_F - \mathrm{Id}_F) \oplus \operatorname{Ker}(u_{F'} - \mathrm{Id}_{F'})$ est directe. Procédons maintenant par double inclusion.

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F) \oplus \operatorname{Ker}(u_{F'} - \alpha\mathrm{Id}_{F'})$ ; il existe $x_1 \in \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(u_{F'} - \alpha\mathrm{Id}_{F'})$ tel que $x = x_1 + x_2$. Alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha x$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u - \alpha\mathrm{Id}_E)$.
- Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \alpha\mathrm{Id}_E)$. Décomposons $x$ suivant la somme $E = F \oplus F'$ : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F'$. Alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2)$ avec $u(x_1) \in F$ et $u(x_2) \in F'$. Mais $u(x) = \alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$ avec $\alpha x_1 \in F$ et $\alpha x_2 \in F'$. Par unicité de la décomposition dans une somme directe, $u(x_1) = \alpha x_1$ et $u(x_2) = \alpha x_2$, soit $x_1 \in \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(u_{F'} - \alpha\mathrm{Id}_{F'})$. Ceci achève la démonstration.

*c)* $u$ étant diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u - \alpha\mathrm{Id}_E)$ donc d'après ce qui précède,

$$E = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u_{F'} - \alpha\mathrm{Id}_{F'}).$$

On a $\displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F) \subset F$ et $\displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u_{F'} - \alpha\mathrm{Id}_{F'}) \subset F'$ et puisque $E = F \oplus F'$, il en résulte que $F = \displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u_F - \alpha\mathrm{Id}_F)$, autrement dit que $u_F$ est diagonalisable (et que $\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)$).

**Remarque**. Il existe dans le cours une preuve beaucoup plus facile de ceci, en utilisant la notion de polynôme annulateur : puisque $u$ est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. Or si $P(u) = 0$ alors *a fortiori* $P(u_F) = 0$, ce qui montre que $u_F$ est diagonalisable.

**Question 7.**

*a)* En dimension 1, tout endomorphisme est diagonalisable sur n'importe quelle base.

*b)* Si $\mathscr{U}$ n'est composé que d'homothéties, toute base de E convient.

Soit maintenant $u \in \mathscr{U}$ qui n'est pas une homothetie, et $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ un de ses sous-espaces propres. On a $\dim \mathrm{F} \in [\![1, n-1]\!]$ ($\dim \mathrm{F} \neq n$ car $u$ n'est pas une homothetie).

Soit $v \in \mathscr{U}$. Pour tout $x \in \mathrm{F}$, $u(x) = \alpha x$ donc $v \circ u(x) = \alpha v(x)$. Mais $v \circ u = u \circ v$ donc $u\big(v(x)\big) = \alpha v(x)$, soit $v(x) \in \mathrm{F}$. F est bien stable par tout élément de $\mathscr{U}$.

On peut alors considérer $\mathscr{U}_{\mathrm{F}} = \left\{ v_{\mathrm{F}} \;\middle|\; v \in \mathscr{U} \right\}$. Il s'agit d'une famille d'endomorphismes de F qui vérifient les hypothèses (H) ; par hypothèse de récurrence, il existe une base de F qui les co-diagonalise.

En procédant ainsi pour tout sous-espace propre de $u$, et en réunissant chacune des bases obtenues, on obtient une base de E qui co-diagonalise les éléments de $\mathscr{U}$.

Nous venons de prouver par récurrence le résultat demandé.

**Question 8.**

*a)* L'ensemble $\mathscr{U} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ vérifie les hypothèses (H), donc d'après ce qui précède, A et B sont co-diagonalisables : il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient diagonales.

*b)* On calcule $\mathrm{QQ}' = \left(\begin{array}{c|c} 2\mathrm{I}_n & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & 2\mathrm{I}_n \end{array}\right) = 2\mathrm{I}_{2n}$ donc Q est inversible, et $\mathrm{Q}^{-1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Q}'$.

*c)* On calcule $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Q}'\mathrm{MQ} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} + \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} - \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} \end{array}\right)$ ; il s'agit d'une matrice diagonale, donc M est diagonalisable.