PSEUDO-INVERSE D'UNE MATRICE

Durée : libre

Si A et U sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), on dit que la matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *pseudo-inverse* de la matrice A si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$AUA = A, \qquad UAU = U, \qquad UA = AU$$

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée, et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

Partie I. Préliminaires

Question 1. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P admet un pseudo-inverse que l'on explicitera.

Question 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A admet un pseudo-inverse. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP$ admet un pseudo-inverse.

Partie II. Étude d'un exemple

Dans cette partie, $n = 3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Question 3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. La matrice A est-elle inversible ? Préciser le rang de A.

On pose $f_1 = (0,1,2)$, $f_2 = (1,2,3)$, $f_3 = (1,-1,1)$ et on note $\mathcal{C}$ la famille (f_1, f_2, f_3).

Question 4. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

Question 5. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Question 6. Déterminer A', matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. On trouvera une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on posera $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Question 7. Justifier que A_1 est inversible et calculer son inverse noté A_1^{-1}, puis montrer que la matrice $U' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_1^{-1}}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.

Question 8. En déduire un pseudo inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies auparavant dans cette partie.

Question 9. Notons p l'endomorphisme canoniquement associé à UA. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{C}$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de p.

Partie III. Unicité du pseudo-inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 1$. on suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

Question 10. En calculant le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer : $UA = AU'$, et en déduire que $U = U'$.

On a ainsi prouvé que le pseudo-inverse, s'il existe, est unique.

Partie IV. Condition d'existence du pseudo-inverse

Dans cette partie, A désigne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$), et f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Une condition nécessaire d'existence

Dans cette section seulement, on suppose que A admet un pseudo-inverse U et l'on désigne par g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U.

Question 11. Montrer que $(\mathrm{AU})^2 = \mathrm{AU}$. Que peut-on en déduire quant à la nature de l'endomorphisme $f \circ g$?

Question 12. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f \circ g)$, puis que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ g)$, et en déduire que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Une condition suffisante d'existence

Dans cette section seulement, on suppose que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Question 13. Montrer que, dans chacun des deux cas où $\operatorname{Ker}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f)$ est réduit au vecteur nul, alors la matrice A admet un pseudo-inverse que l'on déterminera.

On suppose donc, dans la suite de cette sous-section, que ni $\operatorname{Ker}(f)$ ni $\operatorname{Im}(f)$ n'est réduit au vecteur nul.

Question 14. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est stable par f et que $\widetilde{f} : \begin{pmatrix} \operatorname{Im} f & \rightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$ est un automorphisme.

Question 15. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$,d'un entier $r \in [\![1, n-1]\!]$ et d'une matrice inversible $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que la matrice A′ de f dans la base $\mathcal{C}$ soit de la forme

$$\mathrm{A}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

Question 16. Démontrer que la matrice A′ admet un pseudo-inverse que l'on explicitera à l'aide de A_1, et en déduire que la matrice A admet un pseudo-inverse.