Corrigé : pseudo-inverse d'une matrice

Préliminaires

Question 1. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrons que P^{-1} est un pseudo-inverse de P :

$$PP^{-1}P = P, \qquad P^{-1}PP^{-1} = P^{-1}, \qquad P^{-1}P = I = PP^{-1}$$

Question 2. Notons U un pseudo-inverse de A et montrons que $P^{-1}UP$ est un pseudo-inverse de $P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)(P^{-1}UP)(P^{-1}AP) &= P^{-1}AUAP = P^{-1}AP\\ (P^{-1}UP)(P^{-1}AP)(P^{-1}UP) &= P^{-1}UAUP = P^{-1}UP\\ (P^{-1}UP)(P^{-1}AP) &= P^{-1}UAP = P^{-1}AUP = (P^{-1}AP)(P^{-1}UP)\end{aligned}$$

Partie I. Étude d'un exemple

Question 3. Posons $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. On résout $AX = 0 \iff \begin{cases} x = -y\\ z = -y\end{cases}$ donc $\operatorname{Ker} f = \left\{(t,-t,t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}(1,-1,1)$.
On a $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ donc la matrice A n'est pas inversible, et d'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} A = 2$.

Question 4. La matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ vaut $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. On calcule $\det P = -4 \neq 0$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On constate que $f(e_3) = f_1$ et $f(e_1) = f_2$ donc f_1 et f_2 appartiennent à $\operatorname{Im} f$.
Sachant que (f_1, f_2) est libre et que $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ on en déduit que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

Question 5. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(f_3)$ et sachant que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Question 6. On calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ puis (formule de changement de base) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = A'$.

Question 7. $\det A_1 = 4 \neq 0$ donc A_1 est inversible. On calcule ensuite $A_1^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.
On calcule par blocs $A'U'A' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1A_1^{-1}A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = A'$.
De même, $U'A'U' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}A_1A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = U'$.
Enfin,
$U'A' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1^{-1}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A_1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = A'U'$.
On en déduit que U′ est un pseudo-inverse de A′.

Question 8. D'après la question 2, la matrice $PU'P^{-1} = U$ est un pseudo-inverse de $PA'P^{-1} = A$.

Question 9. On a vu que $U'A' = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(p)$ donc p est la projection vectorielle sur $\operatorname{Vect}(f_1, f_2) = \operatorname{Im} f$, parallèlement à $\operatorname{Vect}(f_3) = \operatorname{Ker} f$.

Partie II. Unicité du pseudo-inverse

Question 10. On calcule $AUAU' = (AUA)U' = AU'$ mais aussi $AUAU' = (AU)(AU') = (UA)(U'A) = U(AU'A) = UA$ donc $AU' = UA$.
Mais alors $U' = U'AU' = (U'A)U' = (AU')U' = (UA)U' = U(UA) = U(AU) = U$ donc $U = U'$. Ainsi, le pseudo-inverse, s'il existe, est unique.

Partie III. Condition d'existence du pseudo-inverse

Question 11. $(AU)^2 = A(UAU) = AU$ donc $(f \circ g)^2 = f \circ g$. On en déduit que $f \circ g$ est une projection vectorielle.

Question 12. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$ alors $AX = 0$. Mais $(AU)X = (UA)X = U(AX) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
Réciproquement si $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ alors $AUX = 0$. Mais $AX = (AUA)X = A(UA)X = A(AU)X = A(AUX) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}\, f$, puis $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}\, f$.

Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}\, f$, et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$: il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$, soit $Y = AX$.
On a alors $Y = (AUA)X = AU(AX)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$.
Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(f \circ g$ alors il existe xß $\mathbb{R}^3$ tel que $u = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ donc $y \in \mathrm{Im}\, f$.
Tout ceci montre que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(f \circ g)$.
Sachant que $f \circ g$ est une projection vectorielle, on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f \circ g) \oplus \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et donc d'après ce qui précède, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Question 13. Si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ alors f et donc A est inversible, et d'après la question 1, A possède un pseudo-inverse, la matrice A^{-1}.
Si $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ alors $f = 0$ et donc $A = 0$, et il est facile de constater que A possède un pseudo inverse, la matrice nulle elle-même.

Question 14. On a toujours $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}\, f$, ce qui montre que $\mathrm{Im}\, f$ est stable par f. L'endomorphisme $\widetilde{f}$ est donc bien défini.
On a $\mathrm{Ker}\, \widetilde{f} = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ puisque $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supposés supplémentaires. Ceci montre que $\widetilde{f}$ est injectif, et donc bijectif s'agissant d'un endomorphisme en dimension finie.

Question 15. Considérons une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$: $\mathcal{C}' = (f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
Puisque $\mathrm{Im}\, f$ est stable par f, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ avec $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\widetilde{f})$, et sachant que $\widetilde{f}$ est un automorphisme, A_1 est une matrice inversible de $\mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$.

Question 16. Posons $U' = \left(\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$. Il est facile de vérifier par un calcul par blocs que $A'U'A' = A'$, $U'A'U' = U'$ et $A'U' = U'A'$ donc A' possède un pseudo-inverse, et d'après la question 2, il en est de même de A.