# Correspondance entre suites et séries (d'après Navale PC 1992)

Durée : libre

---

La première partie de ce problème établit quelques correspondances entre suites et séries numériques. La seconde partie applique certains de ces résultats pour étudier une suite définie par récurrence.

## Partie I.

### Convergence au sens de Cesàro

Soit $(\alpha_n)$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ diverge. À toute suite réelle $(u_n)$ on associe la suite $(v_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

**Question 1.** Montrer que si la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$, il en est de même de la suite $(v_n)$.

**Question 2.** Réciproquement, la convergence de la suite $(v_n)$ entraîne-t-elle nécessairement celle de $(u_n)$ ?

**Question 3.** Déterminer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} \left( \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^{1/n}$.

À toute série réelle $\sum u_n$ on associe la suite des sommes partielles $(S_n)$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge au sens de Cesàro* lorsque la suite $(\sigma_n)$ converge.

**Question 4.** Justifier que si la série $\sum u_n$ converge (au sens usuel du terme), elle converge au sens de Cesàro.

**Question 5.** Dans cette question uniquement, on suppose $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas (au sens usuel du terme) mais qu'elle converge au sens de Cesàro.

**Question 6.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k u_k = (n+1)S_n - \sum_{k=0}^{n} S_k$.

**Question 7.** On suppose que la série $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro, et que $\lim_{+\infty} n u_n = 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge au sens usuel du terme.

### Équivalence des sommes partielles

**Question 8.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites à valeurs strictement positives. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Montrer que les deux suites des sommes partielles $(S_n)$ et $(S'_n)$ définies par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

sont équivalentes : $S_n \sim S'_n$.

Dans la suite de cette partie, on considère une suite $(u_n)$ de réels positifs et on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

où $v_n$ est le terme général d'une série absolument convergente.

**Question 9.** Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + w_n$ où $w_n$ est le terme général d'une série absolument convergente.

**Question 10.** En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

**Question 11.** Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n+2)}$ ?

# Partie II.

Dans toute cette partie on considère la suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

**Question 12.** Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ ; on discutera en fonction de la valeur de $u_0$.

## Cas où la suite $(u_n)$ converge

Dans cette sous-partie, on suppose que la suite $(u_n)$ converge sans être stationnaire, et on pose $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Question 13.** Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(v_n)$ ? Montrer que $v_n$ est équivalent à $v_{n+1}$.

**Question 14.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$. Montrer que la suite $(a_n)$ converge, et en déduire à l'aide de la question 8 un équivalent de $(v_n)$.

**Question 15.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que $(b_n)$ tend vers 0 et en trouver un équivalent.

**Question 16.** En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.

## Cas où la suite $(u_n)$ diverge

**Question 17.** Pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $(u_n)$ tend-elle vers $+\infty$ ? Montrer qu'alors $u_n^2$ est équivalent à $u_{n+1}$.

**Question 18.** Prouver que la suite $(P_n)$ définie par $P_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ a une limite $\lambda$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

On suppose jusqu'à la fin du problème que $u_0 > 0$.

**Question 19.** La limite $\lambda$ est fonction de $u_0$ uniquement. Montrer que l'application $u_0 \mapsto \lambda$ est une fonction croissante, que $\lambda > 0$ pour tout $u_0 > 0$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda - \frac{\ln(u_n)}{2^n} < \frac{1}{2^n u_n}$.

**Question 20.** Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ ?