Corrigé : correspondance entre suites et séries (d'après Navale PC 1992)

Partie I.

Convergence au sens de Cesàro

Question 1. Traduisons l'hypothèse : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|v_k - \ell| \leqslant \epsilon$.

On a $v_n - \ell = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (u_k - \ell)$ donc $|v_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k |u_k - \ell|$. Pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ on a donc :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \alpha_k |u_k - \ell| + \frac{\epsilon}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} \alpha_k \leqslant \frac{\mathrm{B}}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \epsilon \qquad \text{en posant } \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \alpha_k |u_k - \ell|.$$

Puisque la série $\sum \alpha_n$ et positive et divergente, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{B}}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} = 0$ et il existe un rang N′ à partir duquel $\dfrac{\mathrm{B}}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \leqslant \epsilon$.

Pour $n \geqslant \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ on a alors $|v_n - \ell| \leqslant 2\epsilon$, ce qui traduit le fait que $\lim v_n = \ell$.

Question 2. La réciproque de ce résultat peut être mise en défaut en posant $\alpha_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$. Dans ce cas $\lim v_n = 0$ bien que (u_n) diverge.

Question 3. Posons $a_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^{1/n}$. On a $\ln a_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Posons alors $\alpha_k = 1$ et $u_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. La question précédente s'applique et on a $v_n = \ln a_n$, donc $\lim \ln a_n = \lim u_n = 0$, et ainsi $\lim a_n = 1$.

Question 4. Dire que la série $\sum u_n$ converge signifie que la suite (S_n) converge et en notant S sa somme on peut appliquer la première question, qui affirme que la suite (σ_n) converge vers S.

Question 5. Considérons dans cette question la suite $u_n = (-1)^n$.

On a $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ et $\sigma_n = \dfrac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} (1 + (-1)^k) = \dfrac{1}{2(n+1)} \left(n + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}\right)$ donc $\lim \sigma_n = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, la série $\sum (-1)^n$ converge au sens de Cesàro alors qu'elle diverge au sens usuel.

Question 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k(\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{S}_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathrm{S}_k = n\mathrm{S}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{S}_k = (n+1)\mathrm{S}_n - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_k$$

(c'est une transformation d'Abel).

Question 7. Ainsi, $\mathrm{S}_n - \sigma_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k u_k$. Aussi, si on suppose que $\lim n u_n = 0$ la première question permet d'en déduire que $\lim \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k u_k = 0$. Si, de plus, on suppose que la suite (σ_n) converge, on peut en déduire que la suite (S_n) converge vers la même limite, autrement dit que la série $\sum u_n$ converge.

Équivalence des sommes partielles

Question 8. Traduisons l'équivalence des suites (u_n) et (v_n) : $v_n - u_n = \mathrm{o}(u_n)$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|v_k - u_k| \leqslant \epsilon u_k$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$ on a ainsi :

$$|\mathrm{S}'_n - \mathrm{S}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |v_k - u_k| \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} |v_k - u_k| + \epsilon \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} u_k \leqslant \mathrm{B} + \epsilon \mathrm{S}_n \qquad \text{avec } \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} |v_k - u_k|.$$

On a $\lim \epsilon S_n = +\infty$ donc il existe un rang N' à partir duquel $B \leqslant \epsilon S_n$. Pour $n \geqslant \max(N, N')$ on a alors $|S'_n - S_n| \leqslant 2\epsilon S_n$, ce qui traduit le fait que $S'_n - S_n = o(S_n)$, soit encore $S'_n \sim S_n$.

Question 9. La série $\sum v_n$ converge donc $\lim\left(\frac{\lambda}{n} - v_n\right) = 0$, et le développement limité $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + w_n \quad \text{avec} \quad w_n = v_n - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{n} - v_n\right)^2 + o\left(\frac{\lambda}{n} - v_n\right)^2$$

La série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc pour prouver qu'il en est de même de $\sum w_n$ il reste à prouver que la série $\sum\left(\frac{\lambda}{n} - v_n\right)^2$ converge. Pour cela on développe : $\left(\frac{\lambda}{n} - v_n\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n^2} - 2\lambda\frac{v_n}{n} + v_n^2$.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum \frac{v_n}{n}$ converge absolument car $\frac{v_n}{n} = o(v_n)$ et la série $\sum v_n^2$ converge car $v_n^2 = o(v_n)$. On peut donc conclure que $\sum w_n$ converge absolument.

Question 10. Il s'agit maintenant de démontrer que la suite $n^\lambda u_n$ converge. Pour cela on calcule :

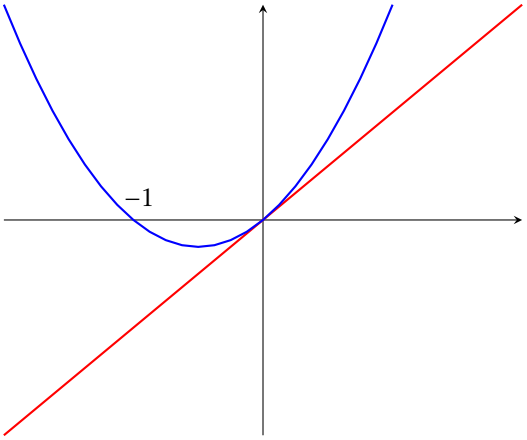
$$\ln\left((n+1)^\lambda u_{n+1}\right) - \ln(n^\lambda u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\lambda \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = w_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La question précédente permet d'affirmer que la série de terme général $\ln\left((n+1)^\lambda u_{n+1}\right) - \ln(n^\lambda u_n)$ converge absolument, donc converge, puis par télescopage que la suite $\ln(n^\lambda u_n)$ converge. En notant ℓ sa limite et en posant $A = e^\ell > 0$ on a bien $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

Question 11. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la question précédente s'applique avec $\lambda = \frac{3}{2}$ et $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et montre qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{3/2}}$. Sachant que $\frac{3}{2} > 1$ on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Partie II.

Question 12. Traçons le graphe des fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto x$:



Une fois ceci fait il est facile de prouver (je ne détaille pas) :
- si $u_0 > 0$ la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$;
- si $-1 \leqslant u_0 \leqslant 0$ la suite est croissante et converge vers 0 ;
- si $u_0 < -1$ on a $u_1 > 0$ et la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Cas où la suite (u_n) converge

Question 13. L'hypothèse de non stationnarité revient à supposer $-1 < u_0 < 1$, et dans ce cas la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers 0. La suite (v_n) est donc à valeurs dans $]0,1[$, strictement décroissante et converge vers 0. Elle vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.
Puisque (v_n) tend vers 0 on a $v_n^2 = o(v_n)$ et ainsi $v_{n+1} = v_n + o(v_n)$, soit $v_{n+1} \sim v_n$.

Question 14. On calcule $\dfrac{1}{v_{n+1}}-\dfrac{1}{v_n}=\dfrac{1}{v_n-v_n^2}-\dfrac{1}{v_n}=\dfrac{1}{1-v_n}$ donc $\lim a_n=1$.
Les séries $\sum a_n$ et $\sum 1$ sont à termes généraux positifs et sont divergentes donc on peut appliquer la question 8 : leurs sommes partielles respectives sont équivalentes, ce qui donne $\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{v_0}\sim\sum_{k=0}^{n-1}1=n$, et donc $v_n\sim\dfrac{1}{n}$.

Question 15. $\lim a_n=1$ donc (b_n) converge vers 0. De plus, $b_n=\dfrac{1}{1-v_n}-1=\dfrac{v_n}{1-v_n}$ donc $b_n\sim\dfrac{1}{n}$.

Question 16. La série $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge donc on peut de nouveau appliquer la question 8 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_n\sim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.
Ceci montre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\Big)-n\sim\ln n$. Par télescopage on obtient $\dfrac{1}{v_{n+1}}-\dfrac{1}{v_1}=n+\ln n+\mathrm{o}(\ln n)$, puis en simplifiant $\dfrac{1}{v_n}=n+\ln n+\mathrm{o}(\ln n)$.
On passe ensuite à l'inverse : $v_n=\dfrac{1}{n+\ln n+\mathrm{o}(\ln n)}=\dfrac{1}{n}\Big(1+\dfrac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)\Big)^{-1}=\dfrac{1}{n}\Big(1-\dfrac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\Big(\dfrac{\ln n}{n}\Big)\Big)$ donc $t_n=v_n-\dfrac{1}{n}\sim-\dfrac{\ln n}{n^2}$.
On a $t_n=\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc la série $\sum t_n$ converge absolument, donc converge.

Cas où la suite (u_n) diverge

Question 17. On a vu que lorsque $u_0<-1$ ou $u_0>0$ la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Dans ce cas, $u_n=\mathrm{o}(u_n^2)$ donc $u_{n+1}\sim u_n^2$.

Question 18. On a $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\big(\ln(u_{n+1})-2\ln(u_n)\big)=\dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}\Big)$. Or $\lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}=1$ donc $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n=\mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{2^{n+1}}\Big)$.
La série $\sum\dfrac{1}{2^n}$ converge donc la série $\sum\big(\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n\big)$ converge (absolument). Par télescopage on en déduit que la suite (P_n) converge ; on note λ sa limite.

Question 19. Considérons deux suites définies par $0<u_0<u_0'$ et les relations $u_{n+1}=u_n+u_{n+1}^2$, $u_{n+1}'=u_n'+(u_{n+1}')^2$. Il est facile de prouver par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant u_n'$, et donc que $\mathrm{P}_n=\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\leqslant\dfrac{\ln(u_n')}{2^n}=\mathrm{P}_n'$. En passant à la limite on obtient que $\lambda=\lim\mathrm{P}_n\leqslant\lim\mathrm{P}_n'=\lambda'$, ce qui montre que l'application $u_0\mapsto\lambda$ est croissante.
Si on reprend le calcul fait, on a aussi $\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\Big(1+\dfrac{1}{u_n}\Big)>0$ donc la suite (P_n) est croissante. De plus $\lim u_n=+\infty$ donc il existe un rang N à partir duquel $u_n>1$ et ainsi $\mathrm{P}_n\geqslant\mathrm{P}_\mathrm{N}>0$. On en déduit par passage à la limite que $\lambda\geqslant\mathrm{P}_\mathrm{N}>0$.
Enfin, toujours par télescopage, $\lambda-\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}=\lambda-\mathrm{P}_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(\mathrm{P}_{k+1}-\mathrm{P}_k)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln\Big(1+\frac{1}{u_k}\Big)\leqslant\ln\Big(1+\frac{1}{u_n}\Big)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}$ (car la suite (u_n) est croissante) et en calculant la somme géométrique on obtient $\lambda-\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{2^n}\ln\Big(1+\dfrac{1}{u_n}\Big)$.
Il reste à appliquer la majoration usuelle $\forall x>0,\ \ln(1+x)<x$ pour obtenir $\lambda-\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}<\dfrac{1}{2^nu_n}$.

Question 20. On a $u_n=\mathrm{e}^{2^n\mathrm{P}_n}$. La suite (P_n) converge vers $\lambda>0$ donc il existe un rang N à partir duquel $\mathrm{P}_n\geqslant\dfrac{\lambda}{2}$.On a alors $u_n\geqslant\mathrm{e}^{2^{n-1}\lambda}$ soit $0<\dfrac{1}{u_n}\leqslant(\mathrm{e}^{-\lambda})^{2^{n-1}}$. Mais $0<\mathrm{e}^{-\lambda}<1$ donc $\dfrac{1}{u_n}=\mathrm{o}\big((\mathrm{e}^{-\lambda})^n\big)$ et par comparaison à une série géométrique convergente, la série positive $\sum\dfrac{1}{u_n}$ converge.