Fonctions d'endomorphismes (Mines PSI 2012 – extrait)

Durée : libre

Dans ce texte, on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.
Pour tout entier $n > 0$ on note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$; l'identité de $\mathcal{L}_n$ est notée I. Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle x \mid y\rangle$ et la norme associée $\|x\| = \langle x \mid x\rangle^{1/2}$. Si $S \in \mathcal{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(S)$. On définit la fonction Q_S sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Q_s(x) = \frac{\langle Sx \mid x\rangle}{\|x\|^2} \tag{1}$$

C'est le quotient de Rayleigh de S.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$. Si $T \in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(T)$ et $M(T)$ le minimum et le maximum de $\sigma(T)$. On dit que $T \in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, on a $\langle Tx \mid x\rangle \geqslant 0$ (resp. $\langle Tx \mid x\rangle) > 0$). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

I Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie on considère $T \in \mathcal{S}_n$.

1. Soient T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$.

2. Montrer que $Q_T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ atteint les valeurs $m(T)$ et $M(T)$.

3. Démontrer que l'on a

$$m(T) = \min_{x \neq 0} Q_T(x) \quad \text{et} \quad M(T) = \max_{x \neq 0} Q_T(x) \tag{2}$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T.

4. Montrer que $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $T \in \mathcal{S}_n^{+*}$ si et seulement si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Soit J un intervalle contenant $\sigma(T)$ et f une fonction définie sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que

$$\forall \lambda \in \sigma(T),\ \forall y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I), \quad Uy = f(\lambda)y \tag{3}$$

puis que $U \in \mathcal{S}_n$.

On notera $U = f(T)$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui même.

6. Soit p la restriction à J d'une fonction polynomiale à coefficients réels. On note $p(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j$, avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in [\![0, k]\!]$. Démontrer que l'endomorphisme $p(T)$ est égal à $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j T^j$ où $T^0 = I$ et $T^j = T \circ \cdots \circ T$ (j fois) pour $j \geqslant 1$.

7. Y-a-t-il des fonctions $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $g(T)$ ne soit pas égal à un polynôme en T ?

8. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $f(T)$ en fonction de ceux de T.

9. Pour des fonctions f et g définies sur l'intervalle J, démontrer que $(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$.

10. On considère $S \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Montrer que $f(S) = S^{-1}$, où S^{-1} note l'inverse de l'endomorphisme S.

11. On considère $S \in \mathcal{S}_n^+$. Lorsque $f(t) = \sqrt{t}$, on note $\sqrt{S}$ l'endomorphisme $f(S)$. Montrer que $\sqrt{S}$ est bien défini et que $(\sqrt{S})^2 = S$. En admettant que toutes les valeurs propres de S sont simples, combien y-a-t-il de solutions C dans $\mathcal{S}_n^+$ puis dans $\mathcal{S}_n$ à l'équation $C^2 = S$?

II Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Une relation $\leqslant$ entre des éléments d'un ensemble $\mathscr{E}$ est appelée une *relation d'ordre* lorsqu'elle est :

(i) *reflexive* : $\forall x \in \mathscr{E},\ x \leqslant x$;

(ii) *antisymétrique* : $\forall x, y \in \mathcal{E},\ \left(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x\right) \implies x = y$;

(iii) *transitive* : $\forall x, y, z \in \mathscr{E},\ \left(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\right) \implies x \leqslant z$.

De plus, une relation d'ordre est dite *totale* lorsque pour tout $x, y \in \mathscr{E}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$ si et seulement si $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^+$.

12. Démontrer que la relation $\leqslant$ définit une relation d'ordre dans $\mathcal{S}_n$. Est-elle totale ?

13. Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$. Démontrer que si $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$ alors $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U} \leqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ définit un opérateur croissant si pour tous $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(\mathrm{T}_1) \subset \mathrm{J}$ et $\sigma(\mathrm{T}_2) \subset \mathrm{J}$ on a

$$\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2 \Longrightarrow f(\mathrm{T}_1) \leqslant f(\mathrm{T}_2) \tag{4}$$

14. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = t^2$ ne définit pas un opérateur croissant.
On pourra, à cet effet, considérer les endomorphisme T_1 *et* T_2 *canoniquement associés à*

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

15. Soient $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$ tels que $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$. En s'aidant de la question 13 avec $\mathrm{U} = \mathrm{T}_2^{-1/2}$, montrer que les valeurs propres de $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ sont inférieures ou égales à 1. En déduire que $\mathrm{I} \leqslant \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1}$ puis, que l'application $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = -1/t$ définit un opérateur croissant.

16. Soient $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n^+$ tels que $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$. Démontrer que les valeurs propres de $\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1/2}$ sont positives. En déduire que l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = \sqrt{t}$ définit un opérateur croissant.