Corrigé : fonctions d'endomorphismes (Mines PSI 2012 – extrait)

I Fonctions d'endomorphismes symétriques

1. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle (T_1 + T_2)x \mid y\rangle = \langle T_1 x \mid y\rangle + \langle T_2 x \mid y\rangle = \langle x \mid T_1 y\rangle + \langle x \mid T_2 y\rangle = \langle x \mid (T_1 + T_2)y\rangle$ donc $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$.

2. Soit $\lambda \in \sigma(T)$ une valeur propre de T, et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$. Alors $Q_T(x) = \lambda$ donc Q_T atteint chacune des valeurs propres de T, et en particulier $m(T)$ et $M(T)$.

3. Soit (e) une base orthonormée formée de vecteurs propres de T. On pose $Te_k = \lambda_k e_k$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ on a $Q_T(x) = \dfrac{1}{\|x\|^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid x\rangle^2$ donc

$$Q(T) \leqslant \frac{1}{\|x\|^2}\sum_{k=1}^{n} M(T)\langle e_k \mid x\rangle^2 = M(T) \quad \text{et} \quad Q(T) \geqslant \frac{1}{\|x\|^2}\sum_{k=1}^{n} m(T)\langle e_k \mid x\rangle^2 = m(T).$$

Ainsi, $m(T) \leqslant Q_T(x) \leqslant M(T)$. Compte tenu de la question 2. on en déduit que $m(T) = \min\limits_{x\neq 0} Q_T(x)$ et $M(T) = \max\limits_{x \neq 0} Q_T(x)$.

4. Soit $T \in \mathcal{S}_n$. Puisque $m(T) = \min\limits_{x\neq 0} Q_T(x)$ on a $T \in \mathcal{S}_n^+ \iff m(T) \geqslant 0$ et $T \in \mathcal{S}_n^{+*} \iff m(T) > 0$.
Mais $m(T)$ est la plus petite des valeurs propres de T donc $T \in \mathcal{S}_n^+ \iff \sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ et $T \in \mathcal{S}_n^{+*} \iff \sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

5. Considérons une base orthonormée (e) formée de vecteurs propres de T, et notons $Te_k = \lambda_k e_k$. La condition (3) impose $Ue_k = f(\lambda_k)e_k$, ce qui assure déjà l'unicité de U (deux endomorphismes qui coïncident sur une base sont égaux).
Réciproquement, considérons l'endomorphisme U défini par $Ue_k = f(\lambda_k)e_k$, et montrons que U vérifie la condition (3).
Soit $\lambda \in \sigma(T)$, et $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ une base de $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$. On a alors $\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_k} = \lambda$ donc la restriction de U à $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ est bien l'homothétie de rapport $f(\lambda)$.
Enfin, puisque U est diagonalisable dans une base orthonormée, il s'agit bien d'un endomorphisme symétrique : $U \in \mathcal{S}_n$.

6. Posons $U = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j T^j$. Pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, pour tout $y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$, $Ty = \lambda y$ donc $T^j(y) = \lambda^j$ et ainsi $Uy = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda^j y = p(\lambda)y$.
D'après l'unicité démontrée à la question 5., on en déduit que $U = p(T)$.

7. Nous allons montrer que la réponse à cette question est négative.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de T. Celles-ci sont en nombre fini donc il existe un (unique) polynôme p de degré inférieur ou égal à $k-1$ tel que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p(\lambda_i) = f(\lambda_i)$: le polynôme d'interpolation de Lagrange. On a alors $f(T) = p(T)$, et d'après la question précédente, cet endomorphisme est un polynôme en T.

8. La question 5. a montré que $U = f(T)$ se diagonalise sur une même base (orthonormée) que T, donc U et T possèdent les mêmes vecteurs propres, et les valeurs propres de U sont les valeurs distinctes de $f(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(T)$.

9. Pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, pour tout $y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$, $g(T)y = g(\lambda)y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ donc $f(T)g(T)y = f(\lambda)g(\lambda)y = (fg)(\lambda)y$. Les endomorphismes $f(T) \circ g(T)$ et $(fg)(T)$ coïncident sur les sous-espaces propres de T donc sont égaux.

10. Considérons les fonctions $i : t \mapsto t$ et $u : t \mapsto 1$. D'après la question précédente, $f(S) \circ i(S) = u(S)$. Or de manière évidente $i(S) = S$ et $u(S) = I$ donc $f(S) \circ S = I$, ce qui prouve que $f(S) = S^{-1}$.

11. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\sigma(S) \subset \mathbb{R}^+$ donc $f(S) = \sqrt{S}$ est bien défini. D'après la question 9, $f(S)^2 = i(S) = S$ (la fonction i est définie à la question précédente). On a donc bien $(\sqrt{S})^2 = S$.

Considérons maintenant $C \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $C^2 = S$. On a $CS = C^3 = SC$ donc C et S commutent. Les sous-espaces propres de S sont donc stables par C. Mais il s'agit ici de droites vectorielles puisque les valeurs propres sont supposées simples [1], donc ces droites sont engendrées par des vecteurs qui sont propres pour C. Ainsi, toute base orthonormée (e) formée de vecteurs propres de S est aussi formée de vecteurs propres de C.
Si on pose $Se_i = \lambda_i e_i$ et $Ce_i = \mu_i e_i$, on a $C^2 = S$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i^2 = \lambda_i$, ce qui donne une seule solution dans S_n^+ (à savoir $\sqrt{S}$) et :

1. Notons que cette hypothèse n'est pas indispensable, même si elle simplifie le raisonnement. Nous avons démontré en cours que deux endomorphismes symétriques qui commutent se diagonalisent sur une même base.

– 2^n dans $\mathcal{S}_n$ si 0 n'est pas valeur propre de S (car tout nombre strictement positif possède deux racines carrées) ;
– 2^{n-1} dans $\mathcal{S}_n$ si 0 est valeur propre simple de S (car 0 ne possède qu'une racine carrée).

II Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

12. Soient T_1, T_2 et T_3 dans $\mathcal{S}_n$.

• On a $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_1 = 0 \in \mathcal{S}_n^+$ donc $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_1$; la relation est réflexive.

• Si $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_2 \leqslant \mathrm{T}_1$ on a $\sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) \subset \mathbb{R}^+$ et $\sigma(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) \subset \mathbb{R}^+$. Or les valeurs propres de $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2$ sont les opposés des valeurs propres de $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$, donc nécessairement $\sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = \{0\}$, et puisque $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$ est diagonalisable (car élément de $\mathcal{S}_n$) on a $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = 0$. La relation est antisymétrique.

• Si $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_2 \leqslant \mathrm{T}_3$ on a pour tout $x \neq 0$, $\langle(\mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_2)x \mid x\rangle \geqslant 0$ et $\langle(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)x \mid x\rangle \geqslant 0$ donc

$$\langle(\mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_1)x \mid x\rangle = \langle(\mathrm{T}_3 - \mathrm{T}_2)x \mid x\rangle + \langle(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)x \mid x\rangle \geqslant 0$$

ce qui prouve que $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_3$. La relation est réflexive.

La relation n'est en revanche pas totale si $n \geqslant 2$, puisque si T est un endomorphisme symétrique ayant une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative on a ni $0 \leqslant \mathrm{T}$, ni $\mathrm{T} \leqslant 0$ donc 0 et T ne sont pas comparables.

13. Notons que par définition de $\mathcal{S}_n^+$, on a $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle \mathrm{T}_1 x \mid x\rangle \leqslant \langle \mathrm{T}_2 x \mid x\rangle$.
Puisque U est symétrique, $\langle \mathrm{U}\mathrm{T}_1\mathrm{U}x \mid x\rangle = \langle \mathrm{T}_1\mathrm{U}x \mid \mathrm{U}x\rangle \leqslant \langle \mathrm{T}_2\mathrm{U}x \mid \mathrm{U}x\rangle = \langle \mathrm{U}\mathrm{T}_2\mathrm{U}x \mid x\rangle$ donc $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U} \leqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}$.

14. Comme nous y invite l'énoncé, considérons les deux endomorphismes T_1 et T_2 canoniquement associés aux matrices M_1 et M_2.
On a $\sigma(\mathrm{T}_1) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}^+$ et $\sigma(\mathrm{T}_2) = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^+$ donc on peut définir $f(\mathrm{T}_1)$ et $f(\mathrm{T}_2)$ (puisque f est définie sur $\mathbb{R}^+$).
On a $\sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = \sigma(\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1) = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^+$ donc $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$.
On a $\sigma(\mathrm{T}_2^2 - \mathrm{T}_1^2) = \sigma(\mathrm{M}_2^2 - \mathrm{M}_1^2)$ (d'après la question 6.) avec $\mathrm{M}_2^2 - \mathrm{M}_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\sigma(\mathrm{T}_2^2 - \mathrm{T}_1^2) = \left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$. Les deux valeurs propres sont de signes opposés donc T_1^2 et T_2^2 ne sont pas comparables. Ainsi, $f(t) = t^2$ n'est pas un opérateur croissant.

15. La fonction $t \mapsto t^{-1/2}$ est la composée (commutative) des fonctions $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ donc d'après la question 9. on a $\mathrm{U} = \mathrm{T}_2^{-1/2} = (\mathrm{T}_2^{1/2})^{-1}$. De plus, cet endomorphismes est diagonalisable sur une même base orthonormée que T_2 donc commute avec T_2. Ainsi, $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} = \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}^2 = \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_2^{-1} = \mathrm{I}$.
D'après la question 13. on en déduit que $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U} \leqslant \mathrm{I}$, ce qui prouve que $\sigma(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}) \subset]-\infty, 1[$.
Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$, $\langle \mathrm{U}\mathrm{T}_1\mathrm{U}x \mid x\rangle = \langle \mathrm{T}_1\mathrm{U}x \mid \mathrm{U}x\rangle > 0$ car $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^{+*}$ donc $\sigma(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}) \subset]0, +\infty[$.
En définitive on a donc $\sigma(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}) \subset]0, 1]$, d'où $\sigma(\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1}) \subset [1, +\infty[$, ce qui prouve que $\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \geqslant \mathrm{I}$ puis, en utilisant la question 13., que $\mathrm{T}_1^{-1} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{I} \circ \mathrm{U} = \mathrm{U}^2 = \mathrm{T}_2^{-1}$.
Nous avons donc prouvé que $\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_2 \Longrightarrow -\mathrm{T}_1^{-1} \leqslant -\mathrm{T}_2^{-1}$, autrement dit que $f(t) = -1/t$ définit un opérateur croissant.

16. Soit $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1-2})$, et $x \neq 0$ tel que $(\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1/2})x = \lambda x$. En composant à gauche par $\mathrm{T}_2^{1/2} + \mathrm{T}_1^{1/2}$ on obtient $(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)x + (\mathrm{T}_1^{1/2} \circ \mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_2^{1/2} \circ \mathrm{T}_1^{1/2})x = \lambda(\mathrm{T}_2^{1/2} + \mathrm{T}_1^{1/2})x$.
Observons maintenant que $\langle \mathrm{T}_1^{1/2} \circ \mathrm{T}_2^{1/2} x \mid x\rangle = \langle \mathrm{T}_2^{1/2} x \mid \mathrm{T}_1^{1/2} x\rangle = \langle x \mid \mathrm{T}_2^{1/2} \circ \mathrm{T}_1^{1/2} x\rangle$ donc $\langle(\mathrm{T}_1^{1/2} \circ \mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_2^{1/2} \circ \mathrm{T}_1^{1/2})x \mid x\rangle = 0$.
On a donc $\lambda\langle(\mathrm{T}_2^{1/2} + \mathrm{T}_1^{1/2})x \mid x\rangle = \langle(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)x \mid x\rangle \geqslant 0$ car $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$.
Par ailleurs on a $\langle \mathrm{T}_2^{1/2} x \mid x\rangle \geqslant 0$ et $\langle \mathrm{T}_1^{1/2} x \mid x\rangle \geqslant 0$ car $\mathrm{T}_2^{1/2}$ et $\mathrm{T}_1^{1/2}$ sont dans $\mathcal{S}_n^+$, donc nécessairement $\lambda \geqslant 0$.
Ceci prouve que $\sigma(\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1-2}) \subset \mathbb{R}^+$ et donc que $\mathrm{T}_2^{1/2} \geqslant \mathrm{T}_1^{1/2}$: la fonction $f(t) = \sqrt{t}$ est un opérateur croissant.