Autour du noyau de Poisson (Mines PC 2009)

Durée : libre

Définitions et notations

- On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des nombres réels positifs non entiers.
- On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres complexes de module inférieur strictement à 1.
- Si Z est un nombre complexe, on note $\mathfrak{Re}(Z)$ sa partie réelle et $\mathfrak{Im}(Z)$ sa partie imaginaire.
- Dans tout le problème, on désigne par g la fonction réelle de variable réelle définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{1+u} \end{array}$$

1 – Question préliminaire

1 ▷ Soit x un réel. Montrer que l'intégrale : $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u$ existe si et seulement si $x \in]0,1[$.
L'objet du problème est de calculer la valeur de cette intégrale.

2 – Une identité intégrale

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et développable en série entière sur $[0,1[$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de son développement.

2 ▷ Montrer que l'expression $\displaystyle\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\,\mathrm{d}v$ a un sens pour tout $x > 0$ et tout $y \in [0,1[$.

Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{S}[f](x,y) = \displaystyle\int_0^1 v^{x-1} f(yv)\,\mathrm{d}v \quad$ pour $y \in [0,1[$.

3 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $y \mapsto \mathrm{S}[f](x,y)$ est continue sur $[0,1[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $y \mapsto \mathrm{S}[f](x,y)$ est développable en série entière sur $[0,1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière.

On considère la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D}$ par la relation : $\tilde{f}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $y \in [0,1[$, on considère l'expression $\mathrm{J}[f](x,y) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\,\mathfrak{Re}\left(\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{i\pi x t}\,\tilde{f}(-y\,\mathrm{e}^{i\pi t})\,\mathrm{d}t\right)$.

5 ▷ Calculer, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{I}_n(x) = \dfrac{(-1)^n \pi}{\sin(\pi x)} \displaystyle\int_0^1 \cos(\pi(n+x)t)\,\mathrm{d}t$.

6 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathcal{F}$, la fonction $y \mapsto \mathrm{J}[f](x,y)$ est développable en série entière sur $[0,1[$, et donner les coefficients de son développement en série entière. En déduire que $\mathrm{S}[f](x,y) = \mathrm{J}[f](x,y)$ pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $y \in [0,1[$.

Pour tout $x \in]0,1[$ et tout $y \in [0,1[$, on pose : $\mathrm{C}[f](x,y) = \mathrm{S}[f](x,y) + \mathrm{S}[f](1-x,y)$.

7 ▷ Établir l'identité suivante pour tout $x \in]0,1[$ et tout $y \in [0,1[$: $\mathrm{C}[g](x,y) = \dfrac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{1 - 2y\cos(\pi t) + y^2}\,\mathrm{d}t$.

3 – Noyau de Poisson

Pour tout $y \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1]$, on définit le *noyau de Poisson* P par $\mathrm{P}(t,y) = \dfrac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}$.

8 ▷ Établir l'identité suivante pour tout $y \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1]$: $\mathrm{P}(t,y) = \mathfrak{Re}\left(\dfrac{1+y\,\mathrm{e}^{i\pi t}}{1-y\,\mathrm{e}^{i\pi t}}\right)$.

9 ▷ Montrer que pour $t \in [0,1]$ fixé, la fonction $y \mapsto \mathrm{P}(t,y)$ est développable en série entière sur $[0,1[$, et calculer les coefficients de son développement en série entière.

10 ▷ Établir que pour tout $y \in [0,1[$ on a : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\,\mathrm{d}t = 1$.

Dans les questions 11 et 12 ci-dessous, on désigne par ϕ une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

11 ▷ Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a : $\displaystyle\lim_{y\to 1}\int_\alpha^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\left|\int_0^\alpha \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[0,\alpha]} |\phi(t)|$.

12 ▷ En déduire que l'on a : $\displaystyle\lim_{y\to 1}\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \phi(0)$. On pourra commencer par traiter le cas où $\phi(0) = 0$.

4 – Application à un calcul d'intégrale

Pour tout $x \in]0,1[$ et tout $y \in [0,1[$, on pose : $\mathrm{A}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t,y)\cos(\pi x t)\,\mathrm{d}t$.

13 ▷ Pour tout $x \in]0,1[$ et tout $y \in [0,1[$, exprimer $\mathrm{C}[g](x,y)$ en fonction de $\mathrm{A}(x,y)$ et de $\mathrm{A}(1-x,y)$.

14 ▷ Pour $x \in]0,1[$ fixé, déterminer la limite de $\mathrm{C}[g](x,y)$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

15 ▷ En déduire la valeur de $\mathrm{I}(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.

♦ ♦
♦