

CORRIGÉ : AUTOUR DU NOYAU DE POISSON (MINES PC 2009)

1 – Question préliminaire

1 ▷ $\frac{u^{x-1}}{1+u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^{1-x}}$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u} du$ converge si et seulement si $x > 0$.

$\frac{u^{-x}}{1+u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^x}$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du$ converge si et seulement si $x < 1$.

Si $0 < x < 1$ les deux intégrales convergent donc leur somme $\int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u} du$ aussi.

Si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ l'une de ces deux intégrales converge et l'autre diverge donc leur somme diverge.

2 – Une identité intégrale

2 ▷ f est développable en série entière sur $[0, y]$ donc l'application $v \mapsto f(yv)$ est continue sur $[0, 1]$ et bornée : il existe $M_y \geq 0$ tel que pour tout $v \in [0, 1]$, $|f(yv)| \leq M_y$.

Ainsi, $|v^{x-1} f(yv)| \leq \frac{M_y}{v^{1-x}}$ et $v \mapsto \frac{1}{v^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ donc $v \mapsto v^{x-1} f(yv)$ aussi.

3 ▷ Posons (à $x > 0$ fixé) $g(y, v) = v^{x-1} f(yv) dv$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

– pour tout $v \in]0, 1[$, l'application $y \mapsto g(y, v)$ est continue ;

– soit $\alpha < 1$; f est continue (car développable en série entière) sur $[0, \alpha]$ donc bornée : ainsi, pour tout $v \in]0, 1[$, $|g(y, v)| \leq v^{x-1} \|f\|_{\infty, [0, \alpha]} = \phi(v)$. La fonction ϕ est intégrable sur $]0, 1[$ donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique : la fonction $y \mapsto S[f](x, y)$ est continue sur $[0, \alpha]$ puis par recouvrement sur $[0, 1[$.

4 ▷ On a $S[f](x, y) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^{x-1+n} dv$. Nous allons appliquer le théorème d'inversion somme / intégrale ; pour cela on pose à $x > 0$ et $y \in [0, 1[$ fixés, $u_n(v) = a_n y^n v^{x-1+n}$.

– la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction $v \mapsto v^{x-1} f(yv)$;

– on calcule $\int_0^1 |u_n(v)| dv = |a_n| \frac{y^n}{x+n}$. On a $|a_n| \frac{y^n}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(|a_n| y^n)$. La série $\sum |a_n| y^n$ converge donc $\sum \int_0^1 |u_n(v)| dv$ aussi.

Le théorème s'applique donc, et $S[f](x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n$.

5 ▷ $\int_0^1 \cos(\pi(n+x)t) dt = \left[\frac{\sin(\pi(n+x)t)}{\pi(n+x)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{(-1)^n \sin(\pi x)}{\pi(n+x)}$ donc $I_n(x) = \frac{1}{n+x}$.

6 ▷ Nous avons ici $J[f](x, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n y^n \cos(\pi(n+x)t) dt$ et il s'agit de nouveau d'invertir somme et intégrale. Pour $x \in \mathcal{F}$ et $y \in [0, 1[$ fixés, on pose $u_n(v) = (-1)^n a_n y^n \cos(\pi(n+x)t)$.

Sur l'intervalle $[0, 1]$ on a $\|u_n\|_{\infty} \leq |a_n| y^n$ et $\sum |a_n| y^n$ converge donc la convergence de $\sum u_n$ est normale sur le segment $[0, 1]$, *a fortiori* uniforme. On peut appliquer cette fois le théorème d'inversion des séries de fonctions pour obtenir :

$J[f](x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n I_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x+n} y^n$ d'après la question précédente.

Compte tenu du résultat obtenu à la question 4, on a prouvé que $J[f](x, y) = S[f](x, y)$ pour $x \in \mathcal{F}$ et $y \in [0, 1[$.

7 ▷ g est bien développable en série entière sur $[0, 1[$: $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ donc pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } J[g](x, y) &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \Re\left(\frac{e^{i\pi x t}}{1 - y e^{i\pi t}}\right) dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \Re\left(\frac{e^{i\pi x t} (1 - y e^{-i\pi t})}{(1 - y \cos(\pi t))^2 + y^2 \sin(\pi t)^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) - y \cos(\pi(1-x)t)}{y^2 - 2y \cos(\pi t) + 1} dt. \end{aligned}$$

De même, $J[g](1-x, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) - y \cos(\pi x t)}{y^2 - 2y \cos(\pi t) + 1} dt$. En sommant on obtient :

$$C[g](x, y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)} \int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi x t)}{y^2 - 2y \cos(\pi t) + 1} dt.$$

3 – Noyau de Poisson

8 ▷ On multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\frac{1 + y e^{i\pi t}}{1 - y e^{i\pi t}} = \frac{(1 + y e^{i\pi t})(1 - y e^{-i\pi t})}{|1 - y e^{i\pi t}|^2} = \frac{1 - 2iy \sin(\pi t) - y^2}{(1 - y \cos(\pi t))^2 + \sin(\pi t)^2} \text{ donc } \Re\left(\frac{1 + y e^{i\pi t}}{1 - y e^{i\pi t}}\right) = \frac{1 - y^2}{1 - 2y \cos(\pi t) + y^2} = P(t, y).$$

9 ▷ Pour $t \in [0, 1]$ fixé, la fonction $y \mapsto \frac{1}{1 - y e^{i\pi t}}$ est développable en série entière sur $[0, 1[$, et $\frac{1}{1 - y e^{i\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi n t}$. Il

en est donc de même de la fonction $y \mapsto \frac{1 + y e^{i\pi t}}{1 - y e^{i\pi t}}$, et $\frac{1 + y e^{i\pi t}}{1 - y e^{i\pi t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{i\pi n t} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+1} e^{i\pi(n+1)t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{i\pi n t}$.

D'après la question précédente, $y \mapsto P(t, y)$ est développable en série entière sur $[0, 1[$, et $P(t, y) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \cos(\pi n t)$.

10 ▷ Posons à $y \in [0, 1[$ fixé $u_n(t) = y^n \cos(\pi n t)$. Sur $[0, 1]$ on a $\|u_n\|_\infty = y^n$ donc la série $\sum u_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[0, 1]$. D'après le théorème d'interversion somme / intégrale relatif aux séries de fonctions, on a

$$\int_0^1 P(t, y) dt = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} y^n \int_0^1 \cos(\pi n t) dt = 1.$$

11 ▷ Pour $y \in [0, 1[$ fixé la fonction $t \mapsto P(t, y)$ est positive et décroissante sur $[0, 1]$ donc

$$\left| \int_\alpha^1 P(t, y) \phi(t) dt \right| \leq \int_\alpha^1 P(t, y) |\phi(t)| dt \leq \|\phi\|_\infty (1 - \alpha) P(\alpha, y).$$

Or $\lim_{y \rightarrow 1} P(\alpha, y) = 0$ donc $\lim_{y \rightarrow 1} \int_\alpha^1 P(t, y) \phi(t) dt = 0$.

De même, $\left| \int_0^\alpha P(t, y) \phi(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [0, \alpha]} |\phi(t)| \int_0^\alpha P(t, y) dt \leq \sup_{t \in [0, \alpha]} |\phi(t)| \int_0^1 P(t, y) dt = \sup_{t \in [0, \alpha]} |\phi(t)|$.

12 ▷ Posons $\delta(y) = \left| \int_0^1 P(t, y) \phi(t) dt - \phi(0) \right| = \left| \int_0^1 P(t, y) (\phi(t) - \phi(0)) dt \right|$ d'après la question 10.

ϕ est continue en 0 donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $t \in [0, \alpha]$, $|\phi(t) - \phi(0)| \leq \epsilon$. On écrit alors

$$\delta(y) \leq \int_0^1 P(t, y) |\phi(t) - \phi(0)| dt \leq \epsilon \int_0^\alpha P(t, y) dt + \int_\alpha^1 P(t, y) |\phi(t) - \phi(0)| dt \leq \epsilon + \int_\alpha^1 P(t, y) |\phi(t) - \phi(0)| dt = \theta(y).$$

D'après la question précédente appliquée à $\phi - \phi(0)$, $\lim_{y \rightarrow 1} \theta(y) = \epsilon$ donc il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que pour tout $y \in [\beta, 1[$,

$\theta(y) \leq 2\epsilon$. Nous avons donc prouvé l'existence pour tout $\epsilon > 0$ d'un réel $\beta \in]0, 1[$ tel que pour tout $y \in [\beta, 1[$, $|\delta(y)| \leq 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim_{y \rightarrow 1} \delta(y) = 0$, et donc que $\lim_{y \rightarrow 1} \int_0^1 P(t, y) \phi(t) dt = \phi(0)$.

4 – Application à un calcul d'intégrale

13 ▷ D'après la question 7, $C[g](x, y) = \frac{\pi}{(1+y)\sin(\pi x)}(A(x, y) + A(1-x, y))$.

14 ▷ Pour $x \in]0, 1[$ fixé et d'après la question 12, $\lim_{y \rightarrow 1} A(x, y) = \lim_{y \rightarrow 1} A(1-x, y) = 1$ donc $\lim_{y \rightarrow 1} C[g](x, y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

15 ▷ D'après la partie 2 nous avons $C[g](x, y) = S[g](x, y) + S[g](1-x, y) = \int_0^1 \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+yv} dv$; nous allons montrer que $\lim_{y \rightarrow 1} C[g](x, y) = I(x)$ en appliquant le théorème de convergence dominée dans sa version continue. Pour ce faire, on note (à

$$x \in]0, 1[\text{ fixé}) f(y, v) = \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+yv}.$$

$$\text{– Pour tout } v \in [0, 1[, \lim_{y \rightarrow 1} f(y, v) = \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+v};$$

$$\text{– Pour tout } v \in [0, 1[, |f(y, v)| \leq \left| \frac{v^{x-1} + v^{-x}}{1+v} \right| = \phi(v).$$

La fonction ϕ est intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question 1 donc le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{y \rightarrow 1} C[g](x, y) = I(x), \text{ et d'après la question 14, } I(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$