Retour à l'origine d'une marche aléatoire (Mines PC 2016 – extrait)

Durée : libre

1 – Préliminaire

1 ▷ Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^k$.

2 – Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geqslant 1$, $X_i : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) & \longmapsto & \omega_i \end{pmatrix}$.

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geqslant 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0, \quad S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega).$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$T : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0, \forall n \geqslant 1 \\ \inf\left\{n \geqslant 1 \;\middle|\; S_n(\omega) = 0\right\} & \text{s'il existe } n \geqslant 1 \text{ tel que } S_n(\omega) = 0. \end{cases} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, on définit les événements :

$$E_n = \left\{T > n\right\}, \qquad \text{pour } n \geqslant 1,\ A_n^n = \left\{S_n = 0\right\}, \qquad \text{et pour } k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad A_k^n = \left\{S_k = 0\right\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \left\{S_i \neq 0\right\}$$

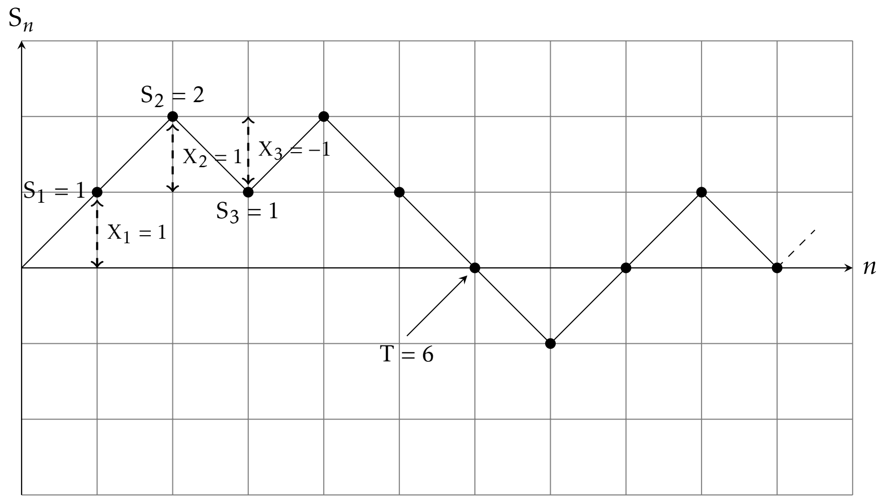

Figure 1 – Ici ω commence par $(1,1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1)$. ω appartient à A_6^6 et A_8^8 ainsi qu'à A_0^1, A_0^2, …,A_0^5, A_6^7 etc.

2 ▷ Montrer pour tout $1 \leqslant k < n$, pour tout $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbb{P}\Big(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}\Big).$$

3 ▷ Montrer pour tout $1 \leqslant k < n$, pour tout $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbb{P}\Big(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}\Big) = \mathbb{P}\Big(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}\Big).$$

Indication : on pourra considérer l'application bijective

$$\theta : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{n-k} \\ (z_1, \dots, z_{n-k}) & \longmapsto & \left(z_1, z_1 + z_2, \dots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j\right) \end{array} \right).$$

4 ▷ En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

5 ▷ Montrer l'égalité $1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

6 ▷ Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right).$$

7 ▷ Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. *Indication : on discutera suivant la parité de n.*

8 ▷ En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

On admettra qu'à partir de ce résultat on peut prouver que $\lim \mathbb{P}(E_n) = 0$.

9 ▷ Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

10 ▷ Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité : $1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$.

11 ▷ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

♦ ♦
♦