Corrigé : retour à l'origine d'une marche aléatoire (Mines PC 2016 – extrait)

1 – Préliminaire

1 ▷ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc en particulier pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} x^k.$$

2 – Marche aléatoire

Il s'agit ici de modéliser une marche aléatoire bi-directionnelle discrète : à chaque étape i le marcheur se déplace d'un pas vers le nord ($\mathrm{X}_i = 1$) ou vers le sud ($\mathrm{X}_i = -1$) de façon équiprobable. La variable aléatoire S_n décrit la position du marcheur à la date n, la variable aléatoire T la date du premier retour à l'origine, s'il existe. E_n est l'événement « à la date n le marcheur n'est encore jamais revenu à sa position initiale », A_n^n l'événement « à la date n le marcheur est revenu à sa position initiale » et A_n^k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ l'événement « k est la dernière date de l'intervalle $[\![k,n]\!]$ à laquelle le marcheur est revenu à sa position initiale ».

2 ▷ Les événements $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ étant indépendants,

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_{k+1} = i_1, \dots, \mathrm{X}_n = i_{n-k}\big) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+j} = i_j) = \frac{1}{2^{n-k}} = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(\mathrm{X}_j = i_j) = \mathbb{P}\big(\mathrm{X}_1 = i_1, \dots, \mathrm{X}_{n-k} = i_{n-k}\big).$$

3 ▷ On dispose des équivalences :

$$\begin{cases} \mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1 \\ \mathrm{S}_{k+2} - \mathrm{S}_k = j_2 \\ \cdots \\ \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}_{k+1} = j_1 \\ \mathrm{X}_{k+1} + \mathrm{X}_{k+2} = j_2 \\ \cdots \\ \mathrm{X}_{k+1} + \cdots + \mathrm{X}_n = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}_{k+1} = j_1 \\ \mathrm{X}_{k+2} = j_2 - j_1 \\ \cdots \\ \mathrm{X}_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases}$$

donc $\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k}\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{X}_{k+1} = j_1, \mathrm{X}_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, \mathrm{X}_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}\big)$, et d'après la question précédente, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = j_1, \mathrm{X}_2 = j_2 - j_1, \dots, \mathrm{X}_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1})$ d'après la question précédente.
Il reste à observer que

$$\begin{cases} \mathrm{X}_1 = j_1 \\ \mathrm{X}_2 = j_2 - j_1 \\ \cdots \\ \mathrm{X}_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{S}_1 = j_1 \\ \mathrm{S}_2 = j_2 \\ \cdots \\ \mathrm{S}_{n-k} = j_{n-k} \end{cases}$$

pour conclure : $\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k}\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{S}_1 = j_1, \dots, \mathrm{S}_{n-k} = j_{n-k}\big)$.

4 ▷ $\mathbb{P}(\mathrm{E}_0) = 1$ donc si $k = n$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n^n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)\mathbb{P}(\mathrm{E}_0)$.
Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k^n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} \neq 0, \cdots, \mathrm{S}_n \neq 0 \mid \mathrm{S}_k = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k \neq 0, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k \neq 0 \mid \mathrm{S}_k = 0)$.
Observons maintenant que S_k ne dépend que des variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_k$ alors que pour tout $p \in [\![k+1, n]\!]$, $\mathrm{S}_p - \mathrm{S}_k$ ne dépend que des variables $\mathrm{X}_{k+1}, \dots, \mathrm{X}_n$. D'après le lemme des coalitions l'événement S_k est donc indépendant des événements $\mathrm{S}_p - \mathrm{S}_k$, $p \in [\![k+1, n]\!]$ et ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k^n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k \neq 0, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k \neq 0)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k \neq 0, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k \neq 0) &= \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{j_1 \neq 0, \cdots, j_{n-k} \neq 0} \big\{\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1, \cdots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k}\big\}\Bigg) \\ &= \sum_{j_1 \neq 0, \cdots, j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k = j_1, \cdots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = j_{n-k}) \end{aligned}$$

car ces événements sont deux-à-deux incompatibles.
D'après la question 3, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k \neq 0, \dots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k \neq 0) = \displaystyle\sum_{j_1 \neq 0, \cdots, j_{n-k} \neq 0} \mathbb{P}(\mathrm{S}_1 = j_1, \dots, \mathrm{S}_{n-k} = j_{n-k}) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_1 \neq 0, \dots, \mathrm{S}_{n-k} \neq 0)$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k^n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_1 \neq 0, \dots, \mathrm{S}_{n-k} \neq 0) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n-k})$.

5 ▷ Si $n=0$ l'égalité demandée est triviale puisque $\mathbb{P}(S_0=0)=1$ et $\mathbb{P}(E_0)=1$. On suppose désormais $n\geqslant 1$.
Soit $\omega\in\Omega$. S'il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que $S_k(\omega)=0$ alors, en considérant le plus grand de ces entiers k on a $\omega\in A_k^n$. Et s'il n'existe pas un tel entier k alors $\omega\in A_0^n$. Ainsi, $\Omega=\bigcup_{k=0}^{n}A_k^n$.
Par ailleurs, on a $k\neq k'\Longrightarrow A_k^n\cap A_{k'}^n=\varnothing$ donc on est en présence d'un système complet d'événements, et ainsi :

$$1=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k^n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k}).$$

6 ▷ Les deux séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 donc on peut réaliser un produit de Cauchy :

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\qquad\text{avec}\quad a_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

D'après ce qui précède, $\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

7 ▷ $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ a même parité que n donc si n est impair, $\mathbb{P}(S_n=0)=0$.
Si $n=2p$ est pair, $\mathbb{P}(S_n=0)$ est égale à la probabilité de tirer p fois la valeur 1 et p fois la valeur -1 en $2p$ tirages soit $\mathbb{P}(S_n=0)=\dfrac{1}{2^{2p}}\dbinom{2p}{p}$.

8 ▷ On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{4^p}\dbinom{2p}{p}x^{2p}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ d'après le préliminaire, et d'après la question 6,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

9 ▷ On a $\{T=+\infty\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $E_{n+1}\subset E_n$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(T=+\infty)=\lim\mathbb{P}(E_n)=0$.

10 ▷ On a $\{T=n\}=\{T>n-1\}\cap\{T\leqslant n\}=\{T>n-1\}\cap\overline{\{T>n\}}=E_{n-1}\cap\overline{E_n}=E_{n-1}\setminus E_n$.
Or $E_n\subset E_{n-1}$ donc $\mathbb{P}(T=n)=\mathbb{P}(E_{n-1})-\mathbb{P}(E_n)$. On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_{n-1})x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n=x\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n=(x-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n+\mathbb{P}(E_0)$$

ce qui, d'après la question 8, donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=n)x^n=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+1=1-\sqrt{1-x^2}$.

11 ▷ Pour tout $x\in]-1,1[$, nous avons

$$\sqrt{1-x^2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!}(-x^2)^n=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)(1/2)(3/2)\cdots((2n-3)/2)}{n!}x^{2n}$$

donc $1-\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1.3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}n!}x^{2n}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!n!}x^{2n}$.

Par unicité du développement en série entière nous avons donc $\mathbb{P}(T=2n)=\dfrac{(2n-2)!}{2.4^{n-1}(n-1)!n!}=\dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}$.