Autour de l'opérateur de dérivation (d'après Mines PC 2001)

Durée : libre

Notations

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $\mathcal{L}(\mathrm{V})$.
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{V} \quad ; \quad f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q′. On notera D_n sa restriction à l'espace vectoriel $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

L'objet du problème est de déterminer, s'il en existe, les endomorphismes $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui vérifient pour un réel λ donné l'égalité :

$$g \circ g = \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{D}.$$

Les 3/2 ne traiteront que la partie I et, de manière optionnelle, la partie II (difficile). La partie III n'est à traiter que par les 5/2.

Préliminaires : noyaux itérés

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

1 ▷ Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboîtée croissante :

$$\mathrm{Ker}\, f^0 \subset \mathrm{Ker}\, f^1 \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+1} \subset \cdots$$

2 ▷

a) Démontrer que, s'il existe un entier p tel que $\mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ alors pour tout entier $q \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\, f^q = \mathrm{Ker}\, f^{q+1}$; en déduire que pour tout entier $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^p$.

b) Montrer que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang $p \leqslant n$. En particulier les noyaux $\mathrm{Ker}\, f^n$ et $\mathrm{Ker}\, f^{n+1}$ sont égaux.

3 ▷ Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ pour lequel l'endomorphisme u^q est nul, l'endomorphisme u^n est nul.
L'endomorphisme u est dit *nilpotent*.

1 – Première partie

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit λ un réel donné.

4 ▷ Dans cette question on suppose l'existence d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{D}$.

a) Montrer que g commute avec D, *i. e.* $g \circ \mathrm{D} = \mathrm{D} \circ g$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est égal à $\mathrm{Ker}\, \mathrm{D}^{n+1}$, démontrer que E_n est stable par l'endomorphisme g de E ; on note g_n la restriction de l'endomorphisme g à E_n.

c) Justifier la relation : $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} + \mathrm{D}_n$.

5 ▷ Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que : $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent, et en déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

6 ▷

a) À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_0} + D_0$?

b) Soit $\lambda < 0$ un réel strictement négatif. Déduire des résultats précédents qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que : $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

Une représentation matricielle simple de D_n

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.
On note A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients $a_{i,j}$ sont définis par les relations :

$$a_{i,i} = \lambda, \quad a_{i,i+1} = 1, \quad a_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1$$

Autrement dit,

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

7 ▷ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$.
Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = \left(f^n(y), f^{n-1}(y), \cdots, y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

8 ▷ En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

9 ▷ **Un exemple**

Dans cette question uniquement l'entier n est égal à 2.

a) Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 : $h = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$, où a, b et c sont trois réels quelconques.

b) En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante : $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$ si et seulement si $\lambda > 0$.

c) Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante : $G^2 = A_1$.

Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D$

L'objet de cette sous-partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

10 ▷ Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et $\dim \mathrm{Ker}(g^2) \geqslant 2$.

11 ▷ En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, ni d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

2 – Deuxième partie

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question 8. La matrice associée à l'application Id_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel $\lambda > 0$ strictement positif, soit L_n l'application de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$ qui, au réel t associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} D_n^k$$

Dérivée de l'application $t \mapsto L_n(t)^k$

12 ▷ Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + tD_n$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) D_n^k$$

les fonctions $a_k : t \mapsto a_k(t)$ étant à déterminer.

13 ▷ Démontrer que l'application $\Phi : t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est dérivable et exprimer sa dérivée à l'aide des matrices D_n et $\Phi(t)$.

14 ▷ Démontrer que, pour tout réel t, $L_n(t)^{n+1} = 0$.

15 ▷ Calculer la fonction dérivée $t \mapsto L_n'(t)$ au moyen des matrices D_n et $\Phi(t)$.
Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée de la fonction $t \mapsto L_n(t)^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $\Phi(t)$.

Matrice $\varphi_u(t)$

Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} L_n(t)^k$$

16 ▷ Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v on a $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t)$.

17 ▷ Montrer que la dérivée de la fonction $t \mapsto \varphi_u(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$\varphi_u'(t) = u D_n \Phi(t) \varphi_u(t)$$

18 ▷ Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle, et en déduire la relation : $\varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n$.

Existence d'un endomorphisme g de E_n tel que $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$ où $\lambda > 0$

19 ▷ Soit $\lambda > 0$ un réel strictement positif ; en utilisant les résultats des questions précédentes et en remarquant la relation suivante : $\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda\left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n\right)$, démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ telle que $M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n$.
En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que : $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$.

20 ▷ Retrouver les matrices obtenues à la question 9.

3 – Troisième partie

21 ▷ Soit h la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par la relation : $h(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Rappeler le rayon de convergence et l'expression (simplifiée) des coefficients b_k du développement en série entière de la fonction h :

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

b) Déterminer les valeurs des réels c_n pour $n \in \mathbb{N}$ définis par la relation suivante : $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$.

Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$ où $\lambda > 0$

Soit $\lambda > 0$ un réel strictement positif.

22 ▷ Soit T l'application définie dans $E = \mathbb{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \in E, \quad T(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda^k} D^k P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

23 ▷ Déterminer l'application composée $T \circ T = T^2$ et en déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante : $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$.

24 ▷

a) En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$, et exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n.

b) Retrouver les matrices obtenues à la question 9.