Corrigé : autour de l'opérateur de dérivation (d'après Mines PC 2001)

Préliminaires : noyaux itérés

1 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \operatorname{Ker} f^k$. On a $f^k(x) = 0_V$ donc $f^{k+1}(x) = f(0_V) = 0_V$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et donc que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

2 ▷

a) Supposons $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et considérons un entier $q \geqslant p$.
D'après la question précédente on a déjà $\operatorname{Ker} f^q \subset \operatorname{Ker} f^{q+1}$.
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} f^{q+1}$. On a $0_V = f^{q+1}(x) = f^{p+1}\big(f^{q-p}(x)\big)$ donc $f^{q-p}(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$. mais par hypothèse $\operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^p$ donc $f^p\big(f^{q-p}(x)\big) = 0_V$ soit $f^q(x) = 0_V$. On a donc $x \in \operatorname{Ker} f^q$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f^q = \operatorname{Ker} f^{q+1}$.

Par récurrence sur k on prouve alors sans peine que pour tout $k \geqslant p$ $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

b) Supposons maintenant qu'un tel entier p n'existe pas : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^p \subsetneq \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
Puisque V est de dimension finie on a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dim(\operatorname{Ker} f^p) + 1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f^{p+1})$. Sachant que $\dim(\operatorname{Ker} f^0) = \dim(\operatorname{Ker} \mathrm{Id}_V) = 0$ on prouve alors sans peine par récurrence sur k que $\dim(\operatorname{Ker} f^k) \geqslant k$, ce qui aboutit à une contradiction pour $k = n+1$ car comme tout sous-espace vectoriel de V on doit avoir $\dim(\operatorname{Ker} f^{n+1}) \leqslant \dim V = n$.
Ceci montre l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$; supposons de plus cet entier minimal. On a alors $\operatorname{Ker} f^0 \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$ et, là encore par récurrence on prouve que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker} f^k) \geqslant k$.
En particulier, $p \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f^p)$ et puisque $\dim(\operatorname{Ker} f^p) \leqslant \dim V = n$ on a bien $p \leqslant n$.

3 ▷ Si $q \leqslant n$ on a $u^q = 0 \implies u^n = 0$ car $u^n = u^q \circ u^{n-q}$.
Si $q > n$, d'après la question 2 on a $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^{n+1}$ et pour tout $k \geqslant n$, $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^k$. En particulier on a donc $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^q = V$, ce qui montre que $u^n = 0$.

1 – Première partie

Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

4 ▷

a) On a $g \circ D = g \circ (g^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) = g^3 - \lambda g = (g^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ g = D \circ g$ donc g et D commutent.

b) Soit $x \in E_n$ (x désigne donc ici un polynôme de degré inférieur ou égal à n, mais cela importe peu dans cette question).
On a $E_n = \operatorname{Ker} D^{n+1}$ donc $D^{n+1}(x) = 0_E$ et $g\big(D^{n+1}(x)\big) = g(0_E) = 0_E$. Mais d'après la question précédente g commute avec D donc aussi avec D^{n+1} et donc $D^{n+1}\big(g(x)\big) = 0_E$, ce qui montre que $g(x) \in \operatorname{Ker} D^{n+1} = E_n$.
On a montré que pour tout $x \in E_n$, $g(x) \in E_n$, ce qui prouve que E_n est stable par g.

c) L'égalité $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$ ce traduit par : pour tout $x \in E$, $g^2(x) = \lambda x + D(x)$. Puisque $E_n \subset E$ cette égalité est *a fortiori* vraie pour tout $x \in E_n$. Or lorsque $x \in E_n$ on a $g(x) = g_n(x)$ et $D(x) = D_n(x)$ donc $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$.

5 ▷

a) Considérons une base quelconque $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de F (les e_k désignent donc ici des polynômes) et notons d le degré maximal des polynômes de cette base. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $D^{d+1}(e_k) = 0_E$ et de par le caractère générateur d'une base on en déduit par linéarité que pour tout $x \in F$, $D_F^{d+1}(x) = 0_E$. D'après la question 3 du préliminaire on en déduit que pour tout $x \in F$, $D_F^{n+1}(x) = 0$, ce qui montre que $F \subset \mathbb{R}_n[X] = E_n$. Mais $\dim F = n+1 = \dim E_n$ donc $F = E_n$.

b) Puisque les sous-espaces E_n sont stables par D nous venons de montrer que les sous-espaces vectoriels *de dimension finie* de E qui sont stables par D sont les sous-espaces E_n et eux seuls.
Considérons maintenant un sous-espace G de E qui soit stable par D et de dimension infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, G ne peut être inclus dans E_n donc il existe dans G un polynôme P de degré $d > n$.
Puisque G est stable par D les polynômes $(P, P', P'', \cdots, P^{(d)})$ appartiennent à G. Or cette famille est échelonnée en degré donc engendre $\mathbb{R}_d[X]$. Nous avons donc prouvé que $\mathbb{R}_d[X] \subset G$, et *a fortiori* que $\mathbb{R}_n[X] \subset G$ puisque $n < d$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] \subset G$, et donc $G = \mathbb{R}[X] = E$.

En conclusion, les sous-espaces vectoriels stables par D sont E et les E_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

6 ▷

a) Ici nous avons $E_0 = \mathbb{R}$ (espace vectoriel de dimension 1) et $D_0 = 0$ (application nulle). Les endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sont de la forme $g : x \mapsto \mu x$ donc $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} + D_0 \iff \mu^2 = \lambda$, équation qui n'a de solution que lorsque $\lambda \geqslant 0$.

b) Supposons l'existence de $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D$. D'après la question 4 il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un endomorphisme g_n de E_n tel que $g_n^2 = \lambda \mathrm{Id}_E + D_n$. C'est en particulier vrai pour $n = 0$, ce qui impose d'après la question précédente $\lambda \geqslant 0$. Il n'existe donc pas un tel endomorphisme g lorsque $\lambda < 0$.

Une représentation matricielle simple de D_n

7 ▷ Puisque $f^n \neq 0$ il existe $y \in V$ tel que $f^n(y) \neq 0_V$. Montrons que la famille $\big(f^n(y), \dots, f(y), y\big)$ est libre en raisonnant par l'absurde, *ie* en supposant l'existence d'une famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ non identiquement nulle telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f^k(y) = 0_V$.

Notons i l'indice minimal pour lequel $\alpha_i \neq 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \alpha_k f^k(y) = 0_V$. Composons par f^{n-i} : on obtient $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \alpha_k f^{n-i+k}(y) = 0_V$.
Mais pour $k \geqslant i+1$ on a $n-i+k \geqslant n+1$ et donc $f^{n-i+k}(y) = 0_V$. Il ne reste donc qu'un seul terme dans cette somme : $\alpha_i f^n(y) = 0_V$, ce qui est absurde puisque $\alpha_i \neq 0$ et $f^n(y) \neq 0_V$.
Nous avons montré que la famille $\big(f^n(y), \dots, f(y), y\big)$ est libre ; elle constitue une base de V puisque de cardinal $n+1$, et dans cette base, la matrice associée à V est égale à A_0.

8 ▷ Nous pouvons appliquer le résultat de la question précédente avec $V = \mathbb{R}_n[X]$ et $f = D_n$; il prouve l'existence d'une base B_n de $\mathbb{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à D_n est égale à A_0 et dans ce cas la matrice associée à l'application $\lambda \mathrm{Id}_{E_n} + D_n$ est égale à A_λ.

Remarque. Dans le cas présent, il est facile de construire explicitement une telle base : ce sont les bases de Taylor $\left(\dfrac{(X-a)^n}{n!}, \dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \dots, \dfrac{(X-a)^2}{2}, (X-a), 1\right)$.

9 ▷ **Un exemple**

a) Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ la matrice associée à h dans la base B_2. Alors $h \circ D_2 = D_2 \circ h \iff MA_0 = A_0 M$. On calcule $MA_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ et $A_0 M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc h commute avec D_2 si set seulement si $d = g = h = 0$, $a = e = i$ et $b = f$, ce qui donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

On constate alors que $M = aI_3 + bA_0 + cA_0^2$, ce qui se traduit vectoriellement par $h = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$.

b) On sait que les solutions g de l'équation $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$, si elles existent, commutent avec D_2. Si elles existent elles sont donc de la forme $g = a\mathrm{Id}_{E_2} + bD_2 + cD_2^2$ d'après la question précédente.
On calcule $g^2 = a^2 \mathrm{Id}_{E_2} + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$ (rappelons que $D_2^3 = 0$) et puisque la famille $(\mathrm{Id}_{E_2}, D_2, D_2^2)$ est libre, $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$ si et seulement si $a^2 = \lambda$, $2ab = 1$ et $2ac + b^2 = 0$.
Ces équations n'ont de solution que lorsque $\lambda > 0$; celles-ci sont alors égales à $a = \epsilon\sqrt{\lambda}$, $b = \dfrac{\epsilon}{2\sqrt{\lambda}}$, $c = \dfrac{-\epsilon}{8\lambda\sqrt{\lambda}}$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$.
L'équation $g^2 = \lambda \mathrm{Id}_{E_2} + D_2$ possède donc deux solutions $g = \pm\left(\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_2} + \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} D_2 - \dfrac{1}{8\lambda\sqrt{\lambda}} D_2^2\right)$ lorsque $\lambda > 0$, et aucune sinon.

c) La traduction matricielle de ce résultat est que les matrices G qui vérifient $G^2 = A_\lambda$ s'écrivent $G = \pm\left(\sqrt{\lambda} I_3 + \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} A_0 - \dfrac{1}{8\lambda\sqrt{\lambda}} A_0^2\right)$, ce qui donne pour $\lambda = 1$: $G = \pm\left(I_3 + \dfrac{1}{2} A_0 - \dfrac{1}{8} A_0^2\right) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = \mathrm{D}$

10 ▷ On a $\mathrm{D}_n^{n+1} = 0$ donc $g^{2n+2} = 0$; l'endomorphisme g est donc nilpotent. D'après le préliminaire, il existe donc un entier $p \leqslant \dim \mathrm{E}_n = n+1$ tel que $\mathrm{Ker}\, g^0 \subsetneq \mathrm{Ker}\, g \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(g^{p-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^p) = \mathrm{E}_n$.
De plus, $g^2 \neq 0$ donc $\mathrm{Ker}\, g^0 \subsetneq \mathrm{Ker}\, g \subsetneq \mathrm{Ker}(g^2)$, ce qui impose $\dim \mathrm{Ker}(g^2) \geqslant 2$.

11 ▷ Mais par ailleurs $g^2 = \mathrm{D}_n$ et $\dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{D}_n = 1$ (c'est l'ensemble des polynômes constants). On aboutit donc à une contradiction, ce qui montre qu'un tel endomorphisme g de D_n ne peut exister.
D'après la question 4 il ne peut exister non plus d'endomorphisme g de E tel que $g^2 = \mathrm{D}$ (en effet, si un tel endomorphisme existait, sa restriction g_n à E_n vérifierait $g_n^2 = \mathrm{D}_n$).

2 – Deuxième partie

Dérivée de l'application $t \mapsto \mathrm{L}_n(t)^k$

12 ▷ Calculons le produit :

$$(\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n)\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\mathrm{D}_n^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\mathrm{D}_n^k + \sum_{k=0}^{n} t a_k(t)\mathrm{D}_n^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\mathrm{D}_n^k + \sum_{k=1}^{n+1} t a_{k-1}(t)\mathrm{D}_n^k = a_0(t)\mathrm{I}_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k(t) + t a_{k-1}(t)\Big)\mathrm{D}_n^k$$

car $\mathrm{D}_n^{n+1} = 0$. Pour obtenir un inverse de $\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n$ sous la forme demandée il suffit de savoir résoudre le système

$$\begin{cases} a_0(t) = 1 \\ a_k(t) + t a_{k-1}(t) = 0 \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de constater que $a_k(t) = (-t)^k$ convient (suite géométrique). Par unicité de l'inverse on a donc $(\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-t)^k \mathrm{D}_n^k$.

13 ▷ Chacune des fonctions a_k étant dérivable il en est de même de l'application $\Phi : t \mapsto (\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n)^{-1}$.
Dérivons l'égalité : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n)\Phi(t) = 1$. On obtient : $\mathrm{D}_n\Phi(t) + (\mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n)\Phi'(t) = 0$ donc $\Phi'(t) = -\Phi(t)\mathrm{D}_n\Phi(t)$.
Sachant que D_n et Φ commutent (cela résulte de l'expression obtenue à la question 12) on a donc $\Phi'(t) = -\mathrm{D}_n\Phi(t)^2$.

14 ▷ On a $\mathrm{L}_n(t) = \mathrm{D}_n\mathrm{K}_n(t)$ avec $\mathrm{K}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{t^k}{k}\mathrm{D}_n^{k-1}$. Puisque D_n et $\mathrm{K}_n(t)$ commutent on a $\mathrm{L}_n(t)^{n+1} = \mathrm{D}_n^{n+1}\mathrm{K}_n(t)^{n+1} = 0$ car $\mathrm{D}_n^{n+1} = 0$.

15 ▷ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{L}_n'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1}\mathrm{D}_n^k = \mathrm{D}_n \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \mathrm{D}_n^k = \mathrm{D}_n\Big(\Phi(t) - (-t)^n\mathrm{D}_n^n\Big)$ d'après la question 12 donc $\mathrm{L}_n'(t) = \mathrm{D}_n\Phi(t) - (-t)^n\mathrm{D}_n^{n+1} = \mathrm{D}_n\Phi(t)$ car $\mathrm{D}_n^{n+1} = 0$.
La dérivée de la fonction $t \mapsto \mathrm{L}_n(t)^k$ vaut donc $k\mathrm{L}_n'(t)\mathrm{L}_n^{k-1} = k\mathrm{D}_n\Phi(t)\mathrm{L}_n(t)^{k-1}$.

Matrice $\varphi_u(t)$

16 ▷ $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \Big(\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{u^p}{p!}\mathrm{L}_n(t)^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} \frac{v^q}{q!}\mathrm{L}_n(t)^q\Big) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} \frac{u^p}{p!}\frac{v^q}{q!}\mathrm{L}_n(t)^{p+q}$.

D'après la question 14 on a $\mathrm{L}_n(t)^{p+q} = 0$ dès lors que $p + q > n$ donc $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} \frac{u^p}{p!}\frac{v^q}{q!}\Big)\mathrm{L}_n(t)^k$.

Or $\displaystyle\sum_{p+q=k} \frac{u^p}{p!}\frac{v^q}{q!} = \frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{n}\binom{k}{p}u^p v^{k-p} = \frac{(u+v)^k}{k!}$ donc $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!}\mathrm{L}_n(t)^k = \varphi_{u+v}(t)$.

17 ▷ On applique la question 15 : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_u'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{(k-1)!}\mathrm{D}_n\Phi(t)\mathrm{L}_n(t)^{k-1} = u\mathrm{D}_n\Phi(t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!}\mathrm{L}_n(t)^k = u\mathrm{D}_n\Phi(t)\Big(\varphi_u(t) - \frac{u^n}{n!}\mathrm{L}_n(t)^n\Big)$$

Notons maintenant que D_n et $\Phi(t)$ commutent (ceci résulte de l'expression de $\Phi(t)$ obtenue à la question 12) et que $\mathrm{D}_n\mathrm{L}_n(t)^n = 0$ (même preuve qu'à la question 14) donc $\varphi_u'(t) = u\mathrm{D}_n\Phi(t)\varphi_u(t)$.

18 ▷ On dérive une seconde fois à l'aide de la question 13 :

$$\varphi_u''(t) = u\mathrm{D}_n\Phi'(t)\varphi_u(t) + u\mathrm{D}_n\Phi(t)\varphi_u'(t) = -u\mathrm{D}_n^2\Phi(t)^2\varphi_u(t) + u^2\mathrm{D}_n^2\Phi(t)^2$$

Pour $u = 1$ on obtient $\varphi_1''(t) = 0$; on a donc $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t\varphi_1'(0)$.
Sachant que $\mathrm{L}_n(0) = 0$ et $\varphi(0) = \mathrm{I}_{n+1}$ on a $\varphi_1(0) = \mathrm{I}_{n+1}$ et $\varphi_1'(0) = \mathrm{D}_n$ donc $\varphi_1(t) = \mathrm{I}_{n+1} + t\mathrm{D}_n$.

Existence d'un endomorphisme g de E_n tel que $g_n^2 = \lambda\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} + \mathrm{D}_n$ où $\lambda > 0$

19 ▷ On a $\lambda\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{D}_n = \lambda\varphi_1(1/\lambda)$; il s'agit donc de trouver une matrice M telle que $\mathrm{M}^2 = \lambda\varphi_1(1/\lambda)$.
Posons $\mathrm{M} = \sqrt{\lambda}\varphi_{1/2}(1/\lambda)$. D'après la question 16, $\mathrm{M}^2 = \lambda\varphi_1(1/\lambda) = \lambda\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{D}_n$.
En notant g l'endomorphisme de E_n dont la matrice dans la base B_n est cette matrice M, on obtient $g^2 = \lambda\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} + \mathrm{D}_n$.

20 ▷ Pour $n = 2$ et $\lambda = 1$ on a $\mathrm{M} = \varphi_{1/2}(1) = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_2(1) + \frac{1}{8}\mathrm{L}_2(1)^2$ avec $\mathrm{L}_2(1) = \mathrm{D}_2 - \frac{1}{2}\mathrm{D}_2^2$ soit $\mathrm{M} = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{2}\mathrm{D}_2 - \frac{1}{8}\mathrm{D}_2^3$; on retrouve bien l'une des matrices obtenue à la question 9 puisqu'avec les notations de cette partie on a $\mathrm{D}_2 = \mathrm{A}_0$.

3 – Troisième partie

21 ▷

a) Le rayon de convergence est égal à 1, $b_0 = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$,

$$b_k = \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-k+1)}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-3)}{2^k} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!}$$

b) On a $h(x)^2 = 1 + x$ donc d'après la formule du produit de Cauchy, $c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 ; \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.

Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{D}$ où $\lambda > 0$

22 ▷ Notons que la somme définissant l'application T est en réalité finie puisque $\mathrm{D}^k\mathrm{P} = 0$ dès lors que $k > \deg \mathrm{P}$; l'expression de T(P) a donc bien un sens.
Considérons deux polynômes P et Q et un réel α.
On a $\deg(\alpha\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg\mathrm{P}, \deg\mathrm{Q}) = m$ donc $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\lambda^k}\mathrm{D}^k(\alpha\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \alpha\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\lambda^k}\mathrm{D}^k\mathrm{P} + \sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\lambda^k}\mathrm{D}^k\mathrm{Q}$ par linéarité de D et ainsi $\mathrm{T}(\alpha\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \alpha\mathrm{T}(\mathrm{P}) + \mathrm{T}(\mathrm{Q})$; T est bien un endomorphisme de E.

23 ▷ On a $\mathrm{T}\circ\mathrm{T} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}\frac{b_{n-k}}{\lambda^{n-k}}\mathrm{D}^k\circ\mathrm{D}^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{\lambda^n}\mathrm{D}^n = \mathrm{Id}_\mathrm{E} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{D}$. Ainsi, en posant $g = \sqrt{\lambda}\mathrm{T}$ on a $g\circ g = \lambda\mathrm{T}\circ\mathrm{T} = \lambda\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \mathrm{D}$.

24 ▷

a) E_n est stable par D donc aussi stable par T et donc par g. Notons g_n l'induit de g sur E_n ; ce dernier vérifie la relation $g_n^2 = \lambda\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} + \mathrm{D}_n$, et puisque $\mathrm{D}_n^{n+1} = 0$ on a $g_n = \sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{\lambda^k}\mathrm{D}_n^k$.

b) Pour $n = 2$ et $\lambda = 1$ on obtient $g_2 = b_0\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2} + b_1\mathrm{D}_2 + b_2\mathrm{D}_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2} + \frac{1}{2}\mathrm{D}_2 - \frac{1}{8}\mathrm{D}_2^2$, ce qui correspond à la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{2}\mathrm{A}_0 - \frac{1}{8}\mathrm{A}_0^2$ déjà obtenue à la question 9.