Produit de Kronecker (ESIM PC 2001)

Durée : libre

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On identifiera $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Si M est une matrice, m_{ij} désigne le coefficients d'indice (i,j) de M et $\mathrm{C}_j(\mathrm{M})$ désigne la j-ème colonne de cette matrice.
- Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{A})$ désigne le rang de A.
- À l'aide de la notion de matrice par bloc, on définit :
  - pour $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$, $\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} x_1 \mathrm{Y} \\ \vdots \\ x_n \mathrm{Y} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{np}$;
  - pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ comme la matrice carrée d'ordre np, dont la représentation par blocs carrés d'ordre p est :
$$\begin{pmatrix} a_{11}\mathrm{B} & a_{12}\mathrm{B} & \cdots & a_{1n}\mathrm{B} \\ a_{21}\mathrm{B} & a_{22}\mathrm{B} & \cdots & a_{2n}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathrm{B} & a_{n2}\mathrm{B} & \cdots & a_{nn}\mathrm{B} \end{pmatrix}$$
  Par exemple, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$.
- Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{A})$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.
- Si $u_1, \dots, u_p$ sont des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(u_1, \dots, u_p)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$.
- Si X est une matrice colonne, $\overline{\mathrm{X}}$ désigne la matrice colonne dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de X.

Partie I.

Question 1. Montrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = 0$ si et seulement si $\mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.

Question 2.

a) Montrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{Y} \in \mathbb{K}^p$, $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}) = (\mathrm{AX}) \otimes (\mathrm{BY})$.

b) De même, montrer que pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{A}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\mathrm{B}, \mathrm{B}') \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$, $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})(\mathrm{A}' \otimes \mathrm{B}') = (\mathrm{AA}') \otimes (\mathrm{BB}')$.

Question 3. Montrer que pour toutes matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est nilpotente si et seulement si A ou B est nilpotente.

Question 4.

a) On suppose que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont inversibles. Montrer que $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est inversible, et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

b) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Question 5. On note $J_n(r)$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, qui valent 1.

a) Pour $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$ démontrer que $\mathrm{rg}\big(J_n(r) \otimes J_p(s)\big) = rs$.

b) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rang s. Montrer que $A \otimes B$ est de rang rs.

c) En déduire que $A \otimes B$ inversible implique A et B inversibles.

Question 6. On note $(U_1, \ldots, U_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $(V_1, \ldots, V_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (U_1 \otimes V_1, \ldots, U_1 \otimes V_p, U_2 \otimes V_1, \ldots, U_2 \otimes V_p, \ldots, U_n \otimes V_1, \ldots, U_n \otimes V_p)$ est la base canonique de K^{np}.

b) On note encore $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients a_{ij} et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de coefficients b_{ij}.

Établir que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $(A \otimes B)(U_i \otimes V_j) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(U_k \otimes V_\ell)\Big)$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{np}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$ est $A \otimes B$. Déduire de ce qui précède la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}' = (U_1 \otimes V_1, \ldots, U_n \otimes V_1, U_1 \otimes V_2, \ldots, U_n \otimes V_2, \ldots, U_1 \otimes V_p, \ldots, U_n \otimes V_p)$.

d) Montrer qu'il existe une matrice carrée inversible P d'ordre np telle que $B \otimes A = P^{-1}(A \otimes B)P$.

Partie II.

On considère deux matrices carrées, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Question 7.

a) On considère X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ et Y un vecteur propre de B pour la valeur propre μ. Montrer que $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A \otimes B$ et préciser un vecteur propre associé à cette valeur propre.

b) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de $A \otimes B$ en fonction d'une base de vecteurs propres de A et d'une base de vecteurs propres de B.

c) *Exemple.* Montrer que $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Question 8. On suppose dans cette question que $A \otimes B$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A)$ contient une valeur non nulle.

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et U un vecteur propre pour la valeur propre λ.
- On note $U \otimes \mathbb{K}^p$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{np}$ formé des vecteurs de la forme $U \otimes Y$ pour $Y \in \mathbb{K}^p$.

a) Montrer que $U \otimes \mathbb{K}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{np}$ stable par $A \otimes B$.

b) En choisissant λ convenablement, en déduire que B est diagonalisable. *On rappelle que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.*

On suppose désormais que $A \otimes B$ est diagonalisable et non nulle.

Question 9. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A et B sont diagonalisables.

On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est naturellement inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 10. Montrer que si une des deux matrices A ou B est diagonalisable alors l'autre l'est aussi.

Question 11. On suppose dans cette question que A et B ne sont pas diagonalisables.

On note S la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si p est un entier naturel non nul, O_p la matrice carrée nulle d'ordre p.

a) Montrer que toute valeur propre complexe non nulle de A ou de B n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ non nulles. Montrer que $\lambda\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda\overline{\mu} \in \mathbb{R}$. En déduire que λ^2 et μ^2 sont des nombres réels.

c) Soit $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $i\alpha \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et X un vecteur propre associé. Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\big(X + \overline{X}, i(X - \overline{X})\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A. Quelle est la matrice de l'endomorphisme induit par A dans la base $\big(X + \overline{X}, i(X - \overline{X})\big)$?

d) Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels non nuls (r,s) et $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\,]0,+\infty[^r$, $(\beta_1,\dots,\beta_s)\in\,]0,+\infty[^s$ tels que :

$$\text{A est semblable à } \begin{pmatrix} \alpha_1 S & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_r S & \\ (0) & & & O_{n-2r} \end{pmatrix} \text{ et B est semblable à } \begin{pmatrix} \beta_1 S & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \beta_s S & \\ (0) & & & O_{n-2s} \end{pmatrix}.$$

En déduire que A et B sont semblables à des matrices antisymétriques.

Question 12. Montrer que pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $N\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $(M\otimes N)^T = M^T\otimes N^T$.

Question 13. On suppose que M et N sont des matrices carrées à coefficients réels, non nulles, semblables à des matrices antisymétriques.

a) Montrer quelles ne sont pas diagonalisables (on pourra montrer qu'elles ne possèdent pas de valeurs propres non nulles.

b) Établir que $M\otimes N$ est diagonalisable.