Corrigé : produit de Kronecker (ESIM PC 2001)

Partie I.

Question 1. $A \otimes B = 0$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}B = 0$, autrement dit si et seulement si $B = 0$ ou pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = 0$, ce qui traduit par $A = 0$ ou $B = 0$.

Question 2.

a) Par un calcul par blocs on obtient :

$$(A \otimes B)(X \otimes Y) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j BY \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j BY \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ est le coefficient de la i^{e} ligne du produit AX, donc $(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX) \otimes (BY)$.

b) On procède de même ; un calcul par bloc donne :

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}a'_{k1} BB' & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}a'_{kn} BB' \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{nk}a'_{k1} BB' & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{nk}a'_{kn} BB' \end{pmatrix} ;$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{kj}$ est le coefficient de rang (i,j) de AA' donc $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$.

Question 3. De la question 2 on tire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A \otimes B)^k = (A^k) \otimes (B^k)$; de la question 1 on tire alors que $(A \otimes B)^k = 0$ si et seulement si $A^k = 0$ ou $B^k = 0$. Autrement dit, $A \otimes B$ est nilpotente si et seulement si A ou B l'est.

Question 4.

a) D'après la question 2, $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_n \otimes I_p$, et il est facile de constater que $I_p \otimes I_p = I_{np}$. Ainsi, $(A \otimes B)$ est inversible, d'inverse $A^{-1} \otimes B^{-1}$.

b) On constate que la matrice à étudier est égale à $A \otimes B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont inversibles avec $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A \otimes B$ est inversible, et

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Question 5.

a) On a

$$\mathrm{J}_n(r)\otimes \mathrm{J}_p(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}_p(s) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathrm{J}_p(s) & & & \\ & & & \mathrm{O}_p & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathrm{O}_p \end{pmatrix}$$ (la matrice $\mathrm{J}_p(s)$ est présente r fois sur la diagonale) ;

cette matrice possède rs colonnes non nulles et manifestement linéairement indépendantes, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{J}_n(r)\otimes \mathrm{J}_p(s)) = rs$.

b) D'après la forme géométrique du théorème du rang, il existe quatre matrices inversibles $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q}, \mathrm{Q}' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_n(r)\mathrm{P}'$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Q}\mathrm{J}_p(s)\mathrm{Q}'$. D'après la question 2, $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B} = (\mathrm{P}\otimes\mathrm{Q})(\mathrm{J}_n(r)\otimes\mathrm{J}_p(s))(\mathrm{P}'\otimes\mathrm{Q}')$. D'après la question 4, les matrices $\mathrm{P}\otimes\mathrm{Q}$ et $\mathrm{P}'\otimes\mathrm{Q}'$ sont inversibles donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{J}_n(r)\otimes\mathrm{J}_p(s)\big) = rs$.

c) En particulier, si $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est inversible, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) = np = \mathrm{rg}(\mathrm{A})\,\mathrm{rg}(\mathrm{B})$, et puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \in [\![0,n]\!]$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) \in [\![0,p]\!]$ on a nécessairement $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{B}) = p$, ce qui signifie que A et B sont inversibles.

Question 6.

a) On a $\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j = \begin{pmatrix} u_{i1}\mathrm{V}_j \\ \vdots \\ u_{in}\mathrm{V}_j \end{pmatrix}$ avec $u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc tous les coefficients de $\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j$ sont nuls à l'exception de celui de la ligne $p(i-1)+j$ égal à 1. Pour montrer que qu'on obtient la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$ il faut montrer que tout entier k de $[\![1,np]\!]$ peut s'écrire sous la forme $p(i-1)+j$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Pour cela on considère la division euclidienne de $k-1$ par p, que l'on écrit $k-1 = qp+r$ avec $r \in [\![0,p-1]\!]$ et on pose $j = r+1$ et $i = q+1$. On a bien $j \in [\![1,p]\!]$ et $1 \leqslant k \leqslant np$ entraîne $qp \leqslant np-1$ donc $q \leqslant n - 1/p$, soit $q \in [\![0,n-1]\!]$, ce qui entraîne $i \in [\![1,n]\!]$.
Ainsi, tout vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$ se trouve parmi les $\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j$, et puisqu'il y en a exactement np, ces vecteurs coïncident bien avec la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$. On peut enfin noter que dans la base $\mathcal{B}$ ils sont ordonnés comme il se doit.

b) On a $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})(\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j) = (\mathrm{A}\mathrm{U}_i)\otimes(\mathrm{B}\mathrm{V}_j) = \mathrm{C}_i(\mathrm{A})\otimes\mathrm{C}_j(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} a_{1i}\mathrm{C}_j(\mathrm{B}) \\ \vdots \\ a_{ni}\mathrm{C}_j(\mathrm{B}) \end{pmatrix}$. Compte tenu de la question précédente,

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})(\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j) &= a_{1i}\Big(b_{1j}\mathrm{U}_1\otimes\mathrm{V}_1 + \cdots + b_{pj}\mathrm{U}_1\otimes\mathrm{V}_p\Big) + \cdots + a_{ni}\Big(b_{1j}\mathrm{U}_n\otimes\mathrm{V}_1 + \cdots + b_{pj}\mathrm{U}_n\otimes\mathrm{V}_p\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell j}\mathrm{U}_k\otimes\mathrm{V}_\ell = \sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell j}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathrm{U}_k\otimes\mathrm{V}_\ell\end{aligned}$$

en inversant l'ordre de sommation, ce qui correspond à l'ordre de la décomposition dans la base $\mathcal{B}'$.
Considérons maintenant l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{np})$ défini par $f : \mathrm{X} \mapsto (\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\mathrm{X}$. $\mathcal{B}$ désignant la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$ on a par définition $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$. Cherchons maintenant à exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Dans la première colonne de cette matrice on trouve la décomposition de $f(\mathrm{U}_1\otimes\mathrm{V}_1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell 1}\sum_{k=1}^{n} a_{k1}\mathrm{U}_k\otimes\mathrm{V}_\ell$ dans la base $\mathcal{B}'$; c'est aussi la première colonne de $\mathrm{B}\otimes\mathrm{A}$.

Dans la deuxième colonne de cette matrice on trouve la décomposition de $f(\mathrm{U}_2\otimes\mathrm{V}_1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{\ell 1}\sum_{k=1}^{n} a_{k2}\mathrm{U}_k\otimes\mathrm{V}_\ell$ dans la base $\mathcal{B}'$; c'est aussi la deuxième colonne de $\mathrm{B}\otimes\mathrm{A}$.
Plus généralement, dans la colonne de rang $i+(n-1)j$ de cette matrice se trouve la décomposition de $f(\mathrm{U}_i\otimes\mathrm{V}_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, qui est égale d'après cette formule à $\mathrm{C}_{i+(n-1)j}(\mathrm{B}\otimes\mathrm{A})$.
On a donc bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{B}\otimes\mathrm{A}$.

c) Notons P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. P est une matrice inversible, et d'après la formule de changement de base, $\mathrm{B}\otimes\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\mathrm{P}$.

Partie II.

Question 7.

a) D'après la question 2, $(A\otimes B)(X\otimes Y)=(AX)\otimes(BY)=(\lambda X)\otimes(\mu Y)=\lambda\mu(X\otimes Y)$. D'après la question 1, si $X\neq 0$ et $Y\neq 0$ alors $X\otimes Y\neq 0$ donc $X\otimes Y$ est vecteur propre de $A\otimes B$ pour la valeur propre $\lambda\mu$.

b) Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A et $(Y_1,\dots,Y_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ formée de vecteurs propres de B. Compte tenu de ce qui précède, si on montre que $(X_i\otimes Y_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathbb{K}^{np}$ la matrice associée pour cette base à l'endomorphisme $Z\mapsto(A\otimes B)Z$ sera diagonale, et donc $A\otimes B$ diagonalisable.
Notons P la matrice de passage de la base canonique (U_i) de $\mathbb{K}^n$ vers la base (X_i), et Q la matrice de passage de la base canonique (V_j) de $\mathbb{K}^p$ vers la base (Y_j).
On a $X_i=PU_i$ et $Y_j=QV_j$ donc $X_i\otimes Y_j=(PU_i)\otimes(QV_j)=(P\otimes Q)(V_i\otimes V_j)$. Or on a vu de $(U_i\otimes V_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$ (question 6) et que la matrice $P\otimes Q$ est inversible (question 4) donc $(X_i\otimes Y_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est bien une base de $\mathbb{K}^{np}$.

c) Plutôt que de raisonner vectoriellement comme on l'a fait à la question nprécédente, nous allons raisonner matriciellement.
La matrice à diagonaliser s'écrit $A\otimes B$ avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$. On montre sans difficulté que A et B sont diagonalisables, avec $A=P\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, et $B=Q\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}Q^{-1}$ et $Q=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$.

Alors $A\otimes B=(P\otimes Q)\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}(P^{-1}\otimes Q^{-1})=(P\otimes Q)\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}(P\otimes Q)^{-1}$ où $P\otimes Q=\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&0&1\\1&-2&-1&2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Sp}(A\otimes B)=\{2,-2,0\}$, $E_2(A\otimes B)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_{-2}(A\otimes B)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $E_0(A\otimes B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Question 8.

a) Pour tout $Y\in\mathbb{K}^p$, $(A\otimes B)(U\otimes Y)=(AU)\otimes(BY)=\lambda U\otimes(BY)\in U\otimes\mathbb{K}^p$ puisque $\lambda BY\in\mathbb{K}^p$. Ainsi, $U\otimes\mathbb{K}^p$ est stable par $A\otimes B$.

b) Choisissons une valeur propre λ non nulle. D'après la question précédente, la restriction de $A\otimes B$ à $U\otimes\mathbb{K}^p$ est diagonalisable donc il existe une base $(Y_1,\dots,Y_p)$ de $\mathbb{K}^p$ formée de vecteurs propres pour cet endomorphisme : on pose $(A\otimes B)(U\otimes Y_j)=\mu_j U\otimes Y_j$.
Mais on a vu que $(A\otimes B)(U\otimes Y_j)=\lambda U\otimes(BY_j)$ donc $U\otimes(\lambda BY_j-\mu_jY_j)=0$. Puisque U est un vecteur propre on a $U\neq 0$ et donc $\lambda BY_j-\mu_jY_j=0$ (question 1) et ainsi $BY_j=\dfrac{\mu_j}{\lambda}Y_j$. Les (Y_j) forment une base de vecteur propres pour B de $\mathbb{K}^p$ (leur indépendance linéaire résulte de celle de la famille $(U\otimes Y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$), donc B est diagonalisable.

Question 9. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice A possède au moins une valeur propre λ. S'il est possible de choisir $\lambda\neq 0$, la question 8 montre que B est diagonalisable.
Examinons le cas où la seule valeur propre de A est 0. Puisque A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle, en conséquence de quoi A est nilpotente. D'après la question 3, $A\otimes B$ est aussi nilpotente. Or la seule matrice diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle, ce qui est exclus par hypothèse. Ce cas est donc impossible, et nous avons prouvé que B est diagonalisable.

La première partie a montré que $A\otimes B$ est semblable à $B\otimes A$; cette dernière matrice est donc aussi diagonalisable, et elle aussi non nulle en vertu de la question 1. On peut donc intervertir les rôles de A et B dans le raisonnement précédent et en déduire que A est elle aussi diagonalisable.

Question 10. Si A est diagonalisable, elle possède au moins une valeur propre non nulle car sinon on aurait $A=0$ puis $A\otimes B=0$. On peut donc appliquer la question 8 et en déduire que B est diagonalisable.
Si B est diagonalisable, on procède de même en observant, comme on l'a fait à la question précédente, que $A\otimes B$ et $B\otimes A$ sont semblables donc toutes deux non nulles et diagonalisables. Ainsi, on peut affirmer que A est aussi diagonalisable.

Question 11.

a) Si A possédait une valeur propre réelle, on pourrait appliquer la question 8 et en déduire que B est diagonalisable. Toutes les valeurs propres complexes de A sont donc non réelles. Il en est de même des valeurs propres de B, comme on l'a déjà expliqué aux deux questions précédentes.

b) D'après la question 7, $\lambda\mu$ est valeur propre de $A \otimes B$. Or cette matrice réelle est supposée diagonalisable donc toutes ses valeurs propres sont réelles. On a donc $\lambda\mu \in \mathbb{R}$.

Considérons un vecteur propre Y de B pour la valeur propre μ. On a $BY = \mu Y$ et en passant au conjugué on obtient, puisque B est réelle, $B\overline{Y} = \overline{\mu}\overline{Y}$. Ceci montre que $\overline{\mu}$ est aussi valeur propre de B, et donc que $\lambda\overline{\mu} \in \mathbb{R}$.

De ceci il résulte que $(\lambda\mu)(\lambda\overline{\mu}) \in \mathbb{R}$, soit $\lambda^2|\mu|^2 \in \mathbb{R}$, et puisque $|\mu| > 0$, que $\lambda^2 \in \mathbb{R}$.

De même on établirait que $\overline{\lambda}\mu \in \mathbb{R}$, ce qui conduit par un raisonnement analogue à montrer que $\mu^2 \in \mathbb{R}$.

c) La question précédente a montré que les valeurs propres non nulles de A peuvent s'écrire $\lambda = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Et puisque $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A on peut, quitte à remplacer λ par son conjugué, supposer $\alpha > 0$.

On a $AX = i\alpha X$ et $A\overline{X} = -i\alpha\overline{X}$ donc $A(X + \overline{X}) = \alpha i(X - \overline{X})$ et $Ai(X - \overline{X}) = -(X + \overline{X})$. Puisque $X + \overline{X}$ et $i(X - \overline{X})$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, ils engendrent bien un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par A. Ce sous-espace vectoriel est de dimension 2 car les vecteurs X et $\overline{X}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}$, étant deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes. Enfin, la matrice associée dans cette base à l'induit de A est la matrice S.

d) D'après la question 9 A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et compte tenu de ce qui précède, semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice de la forme $\operatorname{diag}(i\alpha_1, -i\alpha_1, \ldots, i\alpha_r, -i\alpha_r, 0, \ldots, 0)$. Notons $(X_1, \overline{X}_1, \ldots, X_r, \overline{X}_r, X_{r+1}, \ldots, X_{n-r})$ des vecteurs propres associés. Notons que les vecteurs $X_{r+1}, \ldots, X_{n-r}$ sont réels puisque associés à la valeur propre réelle 0.

La famille $(X_1 + \overline{X}_1, i(X_1 - \overline{X}_1), \ldots, X_r + \overline{X}_r, i(X_r - \overline{X}_r), X_{r+1}, \ldots, X_{n-r}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, libre dans $\mathbb{C}^n$ donc aussi dans $\mathbb{R}^n$, et dans cette base, la matrice associée à l'endomorphisme $X \mapsto AX$ est de la forme souhaitée.

Question 12. $$(M \otimes N)^T = \begin{pmatrix} m_{11}N & m_{12}N & \cdots & m_{1n}N \\ m_{21}N & m_{22}N & \cdots & m_{2n}N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1}N & m_{n2}N & \cdots & m_{nn}N \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} m_{11}N^T & m_{21}N^T & \cdots & m_{n1}N^T \\ m_{12}N^T & m_{22}N^T & \cdots & m_{n2}N^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1n}N^T & m_{2n}N^T & \cdots & m_{nn}N^T \end{pmatrix} = M^T \otimes N^T.$$

Question 13.

a) Montrons qu'une matrice antisymétrique non nulle A ne peut être diagonalisable. Pour cela, on considère une valeur propre λ de A, et X un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$ et en transposant, $X^T A = -X^T A^T = -(AX)^T = -\lambda X^T$. On en déduit que $X^T AX = \lambda X^T X = -\lambda X^T X$. Or $X^T X = \|X\|^2 > 0$, donc $\lambda = 0$.

La seule valeur propre possible pour A est 0, donc si $A \neq 0$, A ne peut être diagonalisable.

Par transitivité, toute matrice non nulle et semblable à une matrice antisymétrique ne peut être diagonalisable.

b) Posons $M = PAP^{-1}$ et $N = QBQ^{-1}$ où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$, avec A et B antisymétriques.

On a $M \otimes N = (P \otimes Q)A \otimes B(P \otimes Q)^{-1}$ donc $M \otimes N$ est semblable à $A \otimes B$.

D'après la question 12, $(A \otimes B)^T = (-A) \otimes (-B) = A \otimes B$ donc la matrice $A \otimes B$ est symétrique réelle ; elle est donc diagonalisable, ainsi que $M \otimes N$ qui lui est semblable.