

POLYNÔMES DE LEGENDRE (ESIEE PSI 1997 – EXTRAIT)

Durée : libre

Dans tout le problème :

- On désigne par I l'intervalle réel $[-1, 1]$ et par $\mathcal{C}^0(I)$ l'espace des fonctions réelles continues sur I .
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes (à une indéterminée et à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n (avec $n \in \mathbb{N}$), dont la base canonique est $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
- On note $f^{(k)}$ ou $\frac{d^k f}{dx^k}$ la k -ième dérivée d'une fonction f avec la convention usuelle $\frac{d^0 f}{dx^0} = f$.
- On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n U_n}{dx^n}(x)$$

et on convient que $U_0(x) = P_0(x) = 1$.

- À toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , on associe la fonction $L(f)$ définie sur I par :

$$L(f)(x) = \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{df}{dx}(x) \right).$$

Partie I.

Question 1. Soit L_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $L_n(P) = L(P)$.

- Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^p)$ pour $p = 2, \dots, n$ et $n \geq 2$.
- En déduire la matrice M_n de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer les valeurs propres de M_n et en déduire que L_n est diagonalisable.

Question 2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $\frac{d^n}{dx^n}((x-1)^n(x+1)^n)$, établir que :

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

Question 3. Calculer directement P_1 , P_2 , P_3 .

Question 4.

- Vérifier les relations :

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 - 1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0 \quad (2)$$

- En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \quad (3)$$

$$L(P_n) = n(n+1)P_n \quad (4)$$

Question 5. Montrer que, pour $n \geq 1$, P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient dominant a_n de X^n dans P_n .

Question 6. Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de L_n .

Partie II.

Pour f et g appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$ on pose $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ et $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}$, ce qui définit sur l'espace $\mathcal{C}^0(I)$ un produit scalaire et la norme associée (il n'est pas nécessaire de le vérifier).

Question 7. Montrer que, pour m et n entiers naturels : $\langle P_m | P_n \rangle = \langle P_m | L(P_n) \rangle$.
En déduire que, si $m \neq n$, alors $\langle P_m | P_n \rangle = 0$.

Question 8.

a) En utilisant le résultat précédent, montrer que (en convenant que $a_0 = 1$) :

$$\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x)P_n(x) dx = (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \|P_n\|^2$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2 - 2 \int_{-1}^1 x P_n(x) P'_n(x) dx$$

c) En utilisant la relation (3) de la question 4 et les résultats ci-dessus, montrer que :

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

d) On pose $\tilde{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 9. Pour $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n(f) = \int_{-1}^1 f(x) \tilde{P}_n(x) dx$ et on note $d_n(f)$ la distance de f à $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $d_n(f) = \inf \{ \|f - P\| \mid P \in \mathbb{R}_n[X] \}$.

a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{P}_k$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Montrer que :

$$\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 + \sum_{k=0}^n (\lambda_k - c_k(f))^2$$

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\|f - Q\| = d_n(f)$ et que

$$d_n(f)^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k(f)^2$$

c) En conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$.