

CORRIGÉ : POLYNÔMES DE LEGENDRE (ESIEE PSI 1997 – EXTRAIT)

Partie I.

Question 1.

a) $L_n(1) = 0$, $L_n(X) = (X^2 - 1)' = 2X$, et pour tout $p \geq 2$, $L_n(X^p) = (pX^{p-1}(X^2 - 1))' = p((p+1)X^p - (p-1)X^{p-2})$.

b) On en déduit que $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$.

c) La matrice M_n est triangulaire supérieure donc $\text{Sp}(M_n) = \{p(p+1) \mid 0 \leq p \leq n+1\}$. Cette matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes donc est diagonalisable, ainsi donc que l'endomorphisme L_n .

Question 2. D'après la formule de Leibniz,

$$((X-1)^n(X+1)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \right) \left(\frac{n!}{k!} (X+1)^k \right) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

$$\text{donc } P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

$$\text{Ainsi, } P_n(1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}^2 (1+1)^n = 1 \text{ et } P_n(-1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{0}^2 (-1-1)^n = (-1)^n.$$

Question 3. On calcule $P_1 = X$, $P_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{5}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$.

Question 4.

a) $U'_{n+1} = 2(n+1)X(X^2 - 1)^n = 2(n+1)XU_n$ et $(X^2 - 1)U'_n = 2nX(X^2 - 1)^n = 2nXU_n$.

b) En dérivant $n+1$ fois la première égalité à l'aide de la formule de Leibniz on obtient :

$$U_n^{(n+1)} = 2(n+1)^2 U_n^{(n)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} \quad \text{soit} \quad 2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1} = 2(n+1)^2 2^n n!P_n + 2(n+1)X 2^n n!P'_n$$

$$\text{donc } P'_{n+1} = (n+1)P_n + XP'_n.$$

En dérivant $n+1$ fois la seconde égalité à l'aide de la formule de Leibniz on obtient :

$$(X^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)} \quad \text{soit} \quad (X^2 - 1)P''_n + 2XP'_n = n(n+1)P_n$$

$$\text{Or } L_n(P_n) = 2XP'_n + (X^2 - 1)P''_n \text{ donc } L_n(P_n) = n(n+1)P_n.$$

Question 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg U_n = 2n$ donc $\deg P_n = 2n - n = n$.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut } \alpha_n = \frac{1}{2^n n!} (2n)(2n-1) \cdots (n+1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

Question 6. La famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est échelonnée en degré donc constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la relation (4) cette base est constituée de vecteurs propres de L_n .

Partie II.

Question 7. Réalisons une intégration par parties suivant le schéma :
$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} P_m(x) & L(P_n)(x) \\ P'_m(x) & (x^2-1)P'_n(x) \end{array} \right| : \end{array}$$

On obtient $\langle P_m | L(P_n) \rangle = \left[(x^2-1)P_m(x)P'_n(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2+1)P'_m(x)P'_n(x) dx = - \int_{-1}^1 (x^2+1)P'_m(x)P'_n(x) dx.$

En inversant les rôles de m et de n on obtient aussi $\langle P_n | L(P_m) \rangle = - \int_{-1}^1 (x^2+1)P'_n(x)P'_m(x) dx$ donc $\langle P_n | L(P_m) \rangle = \langle P_m | L(P_n) \rangle.$

Mais $L(P_m) = m(m+1)P_m$ et $L(P_n) = n(n+1)P_n$ (question 4) donc $m(m+1)\langle P_m | P_n \rangle = n(n+1)\langle P_m | P_n \rangle$ et ainsi, pour $m \neq n$, $\langle P_m | P_n \rangle = 0$: la famille (P_n) est orthogonale.

Question 8.

a) Posons $P_{n+1} = \alpha_{n+1}X^{n+1} + Q_{n+1}$, avec $\deg Q_{n+1} \leq n$. Alors $P'_{n+1} = (n+1)\alpha_{n+1}X^n + Q'_{n+1}$.

On a $\deg Q'_{n+1} \leq n-1$ donc $Q'_{n+1} \in \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$. Mais la famille étant orthogonale, on a $P_n \in \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})^\perp$, et ainsi, $\langle P_n | Q'_{n+1} \rangle = 0$. On a donc $\langle P'_{n+1} | P_n \rangle = (n+1)\alpha_{n+1}\langle X^n | P_n \rangle.$

De même, $\deg(P_n - \alpha_n X^n) \leq n-1$ donc $\langle P_n - \alpha_n X^n | P_n \rangle = 0$ et ainsi, $\langle X^n | P_n \rangle = \frac{1}{\alpha_n} \|P_n\|^2$, ce qui conduit à $\langle P'_{n+1} | P_n \rangle =$

$(n+1)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \|P_n\|^2$, soit encore $\int_{-1}^1 P'_{n+1}(x)P_n(x) dx = (n+1)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \|P_n\|^2.$

b) Réalisons une intégration par parties suivant le schéma :
$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} xP_n(x) & P'_n(x) \\ P_n(x) + xP'_n(x) & P_n(x) \end{array} \right| : \end{array}$$

$$\int_{-1}^1 xP_n(x)P'_n(x) dx = \left[xP_n(x)^2 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (P_n(x) + xP'_n(x))P_n(x) dx = 2 - \int_{-1}^1 (P_n(x) + xP'_n(x))P_n(x) dx$$

(car $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$) donc $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2 - 2 \int_{-1}^1 xP_n(x)P'_n(x) dx.$

c) D'après la question 4, $xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)$ donc $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2 - 2 \int_{-1}^1 P_n(x)P'_{n+1}(x) dx + 2(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx$ puis à l'aide de la question précédente : $\|P_n\|^2 = 2 - 2(n+1)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \|P_n\|^2 + 2(n+1)\|P_n\|^2.$

D'après la question 5, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2n+1}{n+1}$ ce qui conduit finalement à $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$

d) La famille (P_n) est orthogonale donc il en est de même de la famille $(\tilde{P}_n)$, et d'après la question précédente, $\|\tilde{P}_n\|^2 = 1$ donc la famille $(\tilde{P}_n)$ est orthonormée, en conséquence de quoi la famille $(\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 9.

a) $\|f - P\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f | P \rangle + \|P\|^2.$

La famille $(\tilde{P}_n)$ étant orthonormée, $\|P\|^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2$ et $\langle f | P \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle f | \tilde{P}_n \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k(f)$. Ainsi,

$$\|f - P\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (\lambda_k^2 - 2\lambda_k c_k(f)) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (\lambda_k - c_k(f))^2 - \sum_{k=0}^n c_k(f)^2$$

b) Posons $Q = \sum_{k=0}^n c_k(f)\tilde{P}_k$. La question précédente montre que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|f - P\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 = \|f - Q\|^2$,

avec égalité si et seulement si $P = Q$. On en déduit que $d_n(f) = \|f - Q\|$ et que Q est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel cette égalité a lieu.

c) Sachant que $\mathbb{R}_{n+1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ la suite $(d_n(f))$ est décroissante et donc convergente (car minorée par 0). L'égalité $d_n(f) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k(f)^2$ prouve alors la convergence de la série $\sum c_n(f)$ et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$.