

ÉQUATIONS MATRICIELLES (D'APRÈS ENSIETA 1990)

Durée : libre

Dans ce problème, E et F sont des espaces vectoriels réels, de dimensions respectives p et n , non nulles. f est une application linéaire *non nulle* de E vers F; ainsi $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On désigne par :

- $\Omega(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de F tels que $g \circ f = 0$;
- $\Gamma(f)$ l'ensemble des endomorphismes h de F tels que $h \circ f = f$;
- $\Gamma'(f)$ l'ensemble des éléments h de $\Gamma(f)$ qui sont inversibles.

Rappel : produit matriciel par blocs

On rappelle (ou on admet) que deux matrices définies par blocs peuvent être multipliées à l'instar du produit des matrices 2×2 , sous réserve que les produits soient définis. Plus précisément, si deux matrices M et N sont définies par blocs de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow i \\ \updownarrow n-i \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow j \\ \updownarrow p-j \end{matrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

$\leftarrow \begin{matrix} j & p-j \end{matrix} \rightarrow$
 $\leftarrow \begin{matrix} k & q-k \end{matrix} \rightarrow$

alors $MN = \begin{pmatrix} M_1N_1 + M_2N_3 & M_1N_2 + M_2N_4 \\ M_3N_1 + M_4N_3 & M_3N_2 + M_4N_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow i \\ \updownarrow n-i \end{matrix}$.

$\leftarrow \begin{matrix} k & q-k \end{matrix} \rightarrow$

Partie I.

Question 1. Montrer que $\Omega(f)$ est un espace vectoriel réel et qu'il est stable pour la composition des endomorphismes sur F.

$\Omega(f)$ contient-il l'identité?

Question 2. Montrer que $\Gamma(f)$ est non vide, qu'il est stable pour la composition des endomorphismes de F, puis que si $h \in \Gamma'(f)$ alors $h^{-1} \in \Gamma'(f)$.

Question 3. Dans cette question on suppose $n = p$. Le rang de f , noté r , vérifie : $r < n$.

- a) Quand g décrit $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r' où r' est le rang de g .
- b) Montrer que l'on peut trouver des bases (e) de E et (e') de F telles que la matrice de f relativement à ces bases soit la matrice A dont le coefficient de la i^e ligne et de la j^e colonne $a_{i,j}$ vérifie : $a_{i,i} = 1$ si $1 \leq i \leq r$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
- c) En déduire la dimension de $\Omega(f)$.

Partie II.

Le rang de f est maintenant supposé égal au plus petit des deux entiers n et p .

Question 4. On suppose $p = n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

Question 5. On suppose $p > n$. Déterminer $\Omega(f)$, puis $\Gamma(f)$ et $\Gamma'(f)$.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de la troisième partie du problème, que $p < n$ et $\text{rg } f = p$.

Question 6. Quand g décrit $\Omega(f)$, déterminer la valeur maximale de l'entier r' où r' est le rang de g .

Question 7. Montrer que l'on peut trouver des bases (e) de E et (e') de F pour lesquelles la matrice de f est la matrice A , dont on précisera le nombre de lignes et celui des colonnes, dont le coefficient de la i ème ligne et de la j ème colonne $a_{i,j}$ est tel que : $a_{i,i} = 1$ si $1 \leq i \leq p$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

En déduire :

- l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à g dans la base (e') , lorsque g parcourt $\Omega(f)$, puis l'ensemble des matrices décrit par la matrice associée à h dans la base (e') , lorsque h parcourt $\Gamma(f)$ et, enfin, lorsque h parcourt $\Gamma'(f)$;
- la dimension de $\Omega(f)$.

Les matrices demandées seront données sous forme de blocs.

Partie III.

On rappelle que l'on suppose $p < n$ et $\text{rg } f = p$.

On se propose d'étudier l'équation d'inconnue w où w est une application linéaire vérifiant l'équation :

$$f \circ w = h \quad (1)$$

h étant un élément donné de $\Gamma(f)$.

Question 8. Préciser l'espace de départ et l'espace d'arrivée d'une éventuelle solution de cette équation.

Question 9. Montrer que, si cette équation admet des solutions, alors :

- h est un projecteur ;
- h est de rang au plus p ;
- h est de rang exactement p ;
- $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$;
- l'équation (1) a exactement une solution.

Question 10. Soit alors h un projecteur tel que $\text{Im}(h) = \text{Im}(f)$. En utilisant les bases (e) et (e') déjà définies dans la deuxième partie, résoudre l'équation (1). Déduire du résultat une condition nécessaire et suffisante portant sur h pour que l'équation (1) admette une solution.

