

CORRIGÉ : ÉQUATIONS MATRICIELLES (D'APRÈS ENSIETA 1990)

Partie I.

Question 1. Montrons que $\Omega(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F)$:

- l'endomorphisme nul est élément de $\Omega(f)$;
- si $g_1, g_2 \in \Omega(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$ donc $\lambda g_1 + g_2 \in \Omega(f)$.

Montrons maintenant que $\Omega(f)$ est stable pour la composition des endomorphismes :

si $g_1, g_2 \in \Omega(f)$ alors $(g_1 \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f) = g_1 \circ 0 = 0$ donc $g_1 \circ g_2 \in \Omega(f)$.

Observons enfin que $\text{Id} \notin \Omega(f)$ car dans le cas contraire cela signifierait que $f = 0$, ce qui n'est pas.

Question 2. $\Gamma(f)$ n'est pas vide car il contient Id_F .

Si $h_1, h_2 \in \Gamma(f)$ alors $(h_1 \circ h_2) \circ f = h_1 \circ (h_2 \circ f) = h_1 \circ f = f$ donc $h_1 \circ h_2 \in \Gamma(f)$.

Enfin, si $h \in \Gamma'(f)$ alors $h \circ f = f \iff f = h^{-1} \circ f$ donc $h^{-1} \in \Gamma'(f)$.

Question 3.

a) $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ donc si $g \in \Omega(f)$ alors $\dim \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } g$, soit $r \leq n - r'$, où $r' = \text{rg } g$. Nous avons montré que $r' \leq n - r$, il nous reste à montrer qu'il existe un endomorphisme $g \in \Omega(f)$ de rang $n - r$.

Pour cela, notons H un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans F . On a $F = H \oplus \text{Im } f$ et on note p la projection sur H parallèlement à $\text{Im } f$. On a $\text{rg } p = \dim H = n - r$ et $p \circ f = 0$ donc $p \in \Omega(f)$; $n - r$ est bien la valeur maximale prise par le rang d'un élément g de $\Omega(f)$.

b) *Un résultat du cours à connaître.* Soit H un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . D'après le théorème du rang on a $\dim H = \text{rg } f = r$. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H , que l'on complète par une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker } f$ pour obtenir une base (e) de E .

On sait que f réalise un isomorphisme entre H et $\text{Im } f$ donc $e'_1 = f(e_1), \dots, e'_r = f(e_r)$ est une base de $\text{Im } f$; on la complète pour former une base (e') de F , et par construction on a alors :

$$\text{Mat}_{e,e'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r,p-r} \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{array} \right) = A$$

c) Soit $g \in \mathcal{L}(F)$; sa matrice dans la base (e') prend la forme suivante : $M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & M_4 \end{array} \right)$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $M_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $M_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $M_4 \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$. On calcule :

$$MA = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & M_4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & O \\ \hline M_3 & O \end{array} \right)$$

donc $g \circ f = 0 \iff M_1 = M_3 = 0$. Les éléments de $\Omega(f)$ sont donc les endomorphismes de F dont la matrice dans la base (e') est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O_{r,r} & M_2 \\ \hline O_{n-r,r} & M_4 \end{array} \right)$; ainsi $\dim \Omega(f) = n(n - r)$.

Partie II.

Question 4. Lorsque $p = n$ on a $\text{rg } f = p = n$ donc f est inversible, et ainsi $\Omega(f) = \{0\}$, $\Gamma(f) = \Gamma'(f) = \{\text{Id}\}$.

Question 5. Lorsque $p < n$ on a $\text{rg } f = n$ donc f est surjective : $\text{Im } f = F$ et ainsi, $g \in \Omega(f) \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g \iff \text{Ker } g = F \iff g = 0$. Ainsi, $\Omega(f) = \{0\}$, et sachant que $h \in \Gamma(f) \iff \text{Id} - h \in \Omega(f)$ on a $\Gamma(f) = \Gamma'(f) = \{\text{Id}\}$.

Question 6. On reprend la démarche de la question 3a : $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ donc si $g \in \Omega(f)$ alors $\dim \text{Im } f \leq \dim \text{Ker } g$, soit $p \leq n - r'$, où $r' = \text{rg } g$. Ainsi, $r' \leq n - p$, et il y a égalité par exemple lorsque g est une projection sur un supplémentaire de $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Im } f$. $n - p$ est donc la valeur maximale du rang de $g \in \Omega(f)$.

Question 7. La démarche est semblable à celle utilisée à la question 3b, si ce n'est que cette fois $r = p$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et donc $A = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{n-p,p} \end{array} \right)$.

a) Soit $g \in \mathcal{L}(F)$; on pose $\text{Mat}_{(e')}(g) = M = \left(M_1 \mid M_2 \right)$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{R})$. Alors $g \in \Omega(f) \iff MA = 0 \iff M_1 = 0$. Les matrices associées à $g \in \Omega(f)$ sont de la forme $\left(O_{n,p} \mid M_2 \right)$ avec $M_2 \in \mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{R})$.

$h \in \Gamma(f) \iff \text{Id} - h \in \Omega(f)$ donc les matrices associées à $h \in \Gamma(f)$ sont de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_p & N_1 \\ \hline O_{n-p,p} & N_2 \end{array} \right)$ avec $N_1 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $N_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Enfin, $\det h = \det N_2$ donc les matrices associées aux éléments de $\Gamma'(f)$ sont celles de $\Gamma(f)$ pour lesquelles N_2 est inversible.

b) D'après la question précédente il vient immédiatement $\det \Omega(f) = n(n-p)$.

Partie III.

Question 8. On a $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $h \in \mathcal{L}(F)$ donc $w \in \mathcal{L}(F, E)$.

Question 9. On considère une solution w de l'équation (1).

a) $h \in \Gamma(f)$ et donc $h \circ f = f$. Ainsi, $h \circ h = h \circ f \circ w = f \circ w = h$ donc h est un projecteur.

b) $h = f \circ w$ donc $\text{rg } h \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } w)$. Or $\text{rg } f = p$ donc $\text{rg } h \leq p$.

c) $h \in \Gamma(f)$ donc $f = h \circ f$ avec pour conséquence $\text{rg } f \leq \text{rg } h$. D'où $\text{rg } h = \text{rg } f = p$.

d) Mais $h = f \circ w$ donc $\text{Im } h \subset \text{Im } f$. Ayant mêmes dimensions, $\text{Im } h = \text{Im } f$.

e) Considérons l'application linéaire $\tilde{f} : \left(\begin{array}{c} E \\ x \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{Im } f \\ f(x) \end{array} \right)$ (notez que seul l'espace d'arrivée diffère de f). Par construction cette application est surjective. Or $\dim E = p = \text{rg } f = \dim \text{Im } f$ donc $\tilde{f}$ est un isomorphisme. Et puisque $\text{Im } h = \text{Im } f$, on a $f \circ w = h \iff \tilde{f} \circ w = h \iff w = \tilde{f}^{-1} \circ h$: l'équation (1) possède une unique solution.

Question 10. En faisant en sorte que la base (e') soit adaptée à la décomposition $F = \text{Im } h \oplus \text{Ker } h$ on a $\text{Mat}_{e,e'}(f) = A = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & O_{n-p} \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{(e')}(h) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & O_{n-p} \end{array} \right)$. En posant $\text{Mat}_{e',e}(w) = \left(M_1 \mid M_2 \right)$ avec $M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ on a :

$$f \circ w = h \iff \left(\begin{array}{c} I_p \\ O \end{array} \right) \left(M_1 \mid M_2 \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline O & O \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \iff M_1 = I_p, M_2 = 0$$

Donc $\text{Mat}_{e',e}(w) = \left(I_p \mid O_{p,n-p} \right)$. Ceci assure l'existence et l'unicité de la solution de (1).

La question 10 a montré que si (1) admet une solution alors celle-ci est unique et h est une projection vectorielle sur $\text{Im } f$. Nous venons de montrer la réciproque, à savoir que si h est une projection vectorielle sur $\text{Im } f$ alors (1) possède une solution. On peut conclure : (1) possède une solution (unique) si et seulement si h est une projection sur $\text{Im } f$.

