# Produits infinis

Durée : libre

Dans tout ce problème, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite d'éléments *non nuls* de $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (dans les trois premières parties) ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (dans la partie IV). Les deux premières parties établissent des résultats généraux concernant la convergence des produits infinis de nombres réels. La troisième partie détermine un développement de la fonction sinus sous la forme d'un produit infini.

Pour tout $n\geqslant 1$, on note $p_n=\prod_{k=1}^{n} u_k$. Si la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge, on on dira que le produit infini $\prod u_k$ converge, et on notera alors sa limite $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$.

## Partie I.

Dans cette partie on suppose $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

**Question 1.** Donner un exemple de suite $(u_n)$ telle que $p_n=\prod_{k=1}^{n} u_k$ converge vers 0.

**Question 2.** Prouver que si, pour tout $n\geqslant 1$, $0<u_n<1$, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ converge.

**Question 3.** Justifier la convergence et calculer les produits infinis suivants :

*a)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ *b)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ *c)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$

**Question 4.** Prouver que si $(p_n)$ converge vers une limite $p$ non nulle, alors $(u_n)$ converge vers 1.

**Question 5.** Dans cette question, on suppose que $u_n$ est défini pour $n\geqslant 1$ et qu'il existe un rang $n_0$ à partir duquel $u_n>0$.

*a)* Montrer que si on pose $q_n=\prod_{k=n_0}^{n} u_k$, les deux suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(q_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature.

*b)* Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant n_0}\ln(u_n)$ est convergente, alors la suite $(p_n)$ converge et sa limite est non nulle.

*c)* On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant n_0}\ln(u_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans ces deux cas la limite de la suite $(p_n)$.

## Partie II.

Dans cette partie, on suppose toujours que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $u_n=1+a_n$.

**Question 6.** On suppose *dans cette question uniquement* que $a_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$.
Démontrer que la suite $(p_n)$ est convergente si et seulement si la série $\sum a_n$ est convergente.

Vérifier que sous ces conditions, $\prod_{n=1}^{\infty} u_n>0$.

**Question 7.** On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est convergente.
Montrer que la suite $(p_n)$ est convergente.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la nature de la série $\sum a_n^2$ pour que la limite de $(p_n)$ soit non nulle.

**Question 8.** Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite $(p_n)$ dans les trois cas suivants :

*a)* $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ *b)* $u_n = 1+(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *c)* $u_n = 1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

**Question 9.** Dans cette question on pose pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{a_n}{p_n}$.

*a)* Pour $n > 1$, exprimer $v_n$ en fonction de $p_n$ et de $p_{n-1}$.

*b)* On suppose *dans cette question uniquement* que la série $\sum a_n^2$ est convergente.

Établir que si la série $\sum a_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Réciproquement, la convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$ ?

*c)* Déterminer une suite $(a_n)$ telle que la série $\sum a_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

**Question 10.** Prouver que si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ est défini et non nul.

## Partie III.

**Question 11.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

*a)* Calculer les valeurs de $\mathrm{I}_0$ et $\mathrm{I}_1$.

*b)* Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.

*c)* Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est décroissante, et en déduire que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

**Question 12.**

*a)* Justifier l'existence du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

*b)* Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{I}_{2n}/\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n-2}/\mathrm{I}_{2n-1}} = 1-\dfrac{1}{4n^2}$.

*c)* En déduire la valeur du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

**Question 13.**

*a)* Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{ix} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n$. *On pourra commencer par calculer le module et l'argument de* $1+\dfrac{ix}{n}$.

*b)* En déduire que $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x)$ où $\mathrm{P}_n(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\left(1+\dfrac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\dfrac{ix}{2n}\right)^{2n}\right)$.

**Question 14.**

*a)* Montrer que $\mathrm{P}_n$ est un polynôme de degré $2n-1$ admettant pour racines les réels $x_k = 2n\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$, $k \in [\![1-n, n-1]\!]$.

*b)* En déduire l'existence d'un scalaire non nul $\lambda$ tel que $\mathrm{P}_n(x) = \lambda x \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}\right)$.

*c)* Calculer $\mathrm{P}_n'(0)$ et en déduire que $\lambda = 1$.

**Question 15.** Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $u_k : (n,x) \mapsto \begin{cases} 1-\dfrac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})} & \text{si } k < n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

*a)* Montrer que $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$.

*b)* En admettant que l'on puisse intervertir limite et produit infini, en déduire que $\sin x = x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

*c)* Retrouver enfin grâce à cette formule la valeur du produit infini obtenu à la question 12.c.