Corrigé : produits infinis

Partie I.

Question 1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $p_n = \dfrac{1}{n!}$ donc $\lim p_n = 0$.

Question 2. Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$, la suite des produit partiels (p_n) est positive et décroissante, donc converge vers une limite ℓ (positive ou nulle).

Question 3. Dans les trois cas la question 2 s'applique et permet d'affirmer que ces produits infinis convergent. On calcule les produits partiels par télescopage avant de passer à la limite.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big) = 0.$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{(k+1)^2}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n+2}{2}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{(k+1)^2}\Big) = \frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k+2} = \frac{1}{n+1}\times\frac{n+3}{3}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\Big) = \frac{1}{3}.$

Question 4. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ donc lorsque (p_n) converge vers une limite $\ell \neq 0$, $\lim u_n = 1$.

Question 5.

a) Pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n = p_{n_0}q_n$ avec $p_{n_0} \neq 0$, donc les suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(q_n)_{n\geqslant n_0}$ ont même nature.

b) La suite $(q_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs strictement positives et $\ln(q_n) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_k)$ donc si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\ln(u_n)$ converge et a pour somme ℓ, alors (q_n) converge vers $e^{\ell} > 0$. D'après la question précédente la suite (p_n) converge vers $p_{n_0}e^{\ell} \neq 0$.

c) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_n) = +\infty$ alors $\lim\ln(q_n) = +\infty$ donc $\lim q_n = +\infty$. On en déduit que $\lim p_n = +\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de p_{n_0}. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_n) = -\infty$ alors $\lim\ln(q_n) = -\infty$ donc $\lim q_n = 0$. On en déduit que $\lim p_n = 0$.

Partie II.

Question 6. Commençons par observer que si pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 0$ alors $p_n \geqslant 1$. Ainsi, si la suite (p_n) converge vers un réel p on aura $p \geqslant 1$ et en particulier $p > 0$. Compte tenu de la question 5, la convergence de la suite (p_n) équivaut à la convergence de la série $\sum\ln(1+a_n)$.

Si $\sum a_n$ converge alors $\lim a_n = 0$ donc $\ln(1+a_n) \sim a_n$. De même, si la série $\sum\ln(1+a_n)$ converge alors $\lim a_n = 0$ et de nouveau $\ln(1+a_n) \sim a_n$. On en déduit que les séries $\sum a_n$ et $\sum\ln(1+a_n)$ ont même nature.

Question 7. Puisque $\sum a_n$ converge on a $\lim a_n = 0$ et donc $\ln(1+a_n) = a_n - b_n$ avec $b_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.

La série $\sum b_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, donc deux cas de figure sont envisageables :

- ou bien $\sum a_n^2$ converge, auquel cas $\sum\ln(1+a_n)$ converge car somme de deux séries convergentes et la suite (p_n) converge vers une limite strictement positive (question 5b) ;
- ou bien $\sum a_n^2$ diverge vers $+\infty$, auquel cas $\sum\ln(1+a_n)$ diverge vers $-\infty$ et la suite (p_n) converge vers 0 (question 5c).

Dans tous les cas la suite (p_n) converge, mais sa limite n'est strictement positive que si la série $\sum a_n^2$ converge.

Question 8.

a) La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc d'après la question 6 la suite (p_n) diverge vers $+\infty$.

b) La série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère special relatif aux séries alternées ; d'après la question 7 la suite (p_n) est convergente. La série $\sum \frac{(\ln n)^2}{n}$ diverge car $\frac{1}{n} = \mathrm{O}\Big(\frac{(\ln n)^2}{n}\Big)$ donc, toujours d'après la question 7, (p_n) converge vers 0.

c) La série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le critère spécial relatif aux séries alternées donc d'après la question 7 la suite (p_n) converge. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc d'après la question 7 la limite de (p_n) est non nulle. Pour la calculer, on considère $p_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} \Big(\frac{k+(-1)^{k+1}}{k}\Big)$ et on distingue les indices pairs des indices impairs :

$$p_{2n} = \prod_{q=1}^{n} \Big(\frac{2q-1}{2q}\Big) \times \prod_{q=1}^{n} \Big(\frac{2q}{2q-1}\Big) = 1.$$

La suite (p_{2n}) est constante égale à 1 donc converge vers 1 ; il en est de même de la suite (p_n) puisque nous avons justifié sa convergence.

Question 9.

a) Pour tout $n \geqslant 2$, $p_n = u_n p_{n-1} = (1+a_n)p_{n-1}$ donc $v_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}$.

b) D'après la question 7, si les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ convergent, la suite (p_n) converge vers une limite p non nulle. Ainsi, la suite $\Big(\frac{1}{p_n}\Big)$ converge vers $\frac{1}{p}$. Or par télescopage $\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_n}$ donc la série $\sum v_n$ converge.

En revanche, l'exemple de $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ montre que la réciproque est fausse : $a_n = \frac{1}{n}$ donc $\sum a_n^2$ converge et $\sum a_n$ diverge, et d'après la question 8a la suite (p_n) diverge vers $+\infty$ donc par télescopage la série $\sum v_n$ converge.

c) Pour que la série $\sum v_n$ diverge il faut faire en sorte que (p_n) converge vers 0. On peut donc considérer l'exemple de la question 8b : pour $a_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ la série $\sum a_n$ converge et (p_n) tend vers 0 donc la série $\sum v_n$ diverge.

Question 10. Si la série $\sum |a_n|$ converge il en est de même de la série $\sum a_n$. De plus, $\lim a_n = 0$ donc $a_n^2 = \mathrm{O}(|a_n|)$. Par comparaison de séries positives la série $\sum a_n^2$ est aussi convergente. On peut appliquer donc la question 7 : la suite (p_n) converge vers une limite non nulle.

Partie III.

Question 11.

a) $\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = 1$.

b) Réalisons une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)(\sin t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-(\cos t)(\sin t)^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2(\sin t)^{n-2}\,\mathrm{d}t$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(\sin t)^2)(\sin t)^{n-2}\,\mathrm{d}t = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$$

donc $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.

c) Pour tout $t \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\sin t)^{n+1} \leqslant (\sin t)^n$. En intégrant on obtient $0 \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$; la suite (I_n) est décroissante.

On en déduit $\mathrm{I}_{n-2} \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_n$; or $\mathrm{I}_{n-2} = \frac{n}{n-1}\mathrm{I}_n$ donc $\frac{n}{n-1}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_n$, ce qui prouve par encadrement que $\lim \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

Question 12.

a) La série $\sum \frac{1}{4n^2}$ converge donc d'après la question 7 la suite (p_n) converge.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{\mathrm{I}_{2n}/\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n-2}/\mathrm{I}_{2n-1}} = \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-2}} \cdot \frac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} = 1 - \frac{1}{4n^2}$ d'après la question 11b.

c) Par télescopage il vient : $\prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big) = \frac{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}}/\mathrm{I}_{2\mathrm{N}+1}}{\mathrm{I}_0/\mathrm{I}_1} = \frac{2}{\pi} \frac{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}}}{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}+1}}$ et compte tenu de la question 11c, $\prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{4n^2}\Big) = \frac{2}{\pi}$.

Question 13.

a) $\Big|1 + \frac{ix}{n}\Big| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}$ et $\arg\Big(1 + \frac{ix}{n}\Big) = \arctan\Big(\frac{x}{n}\Big)$ donc $\Big(1 + \frac{ix}{n}\Big)^n = \Big(1 + \frac{x^2}{n^2}\Big)^{n/2} \exp\Big(in \arctan\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)$.

$\Big(1+\frac{x^2}{n^2}\Big)^{n/2} = \exp\Big(\frac{n}{2}\ln\Big(1+\frac{x^2}{n^2}\Big)\Big) = \exp\Big(\frac{x^2}{2n}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$ donc $\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x^2}{n^2}\Big)^{n/2} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n\arctan\Big(\frac{x}{n}\Big) = x$ donc $\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{ix}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^{ix}$.

b) De la formule $\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$ on déduit que $\sin x = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x)$ avec $\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2i}\Big(\Big(1 + \frac{ix}{2n}\Big)^{2n} - \Big(1 - \frac{ix}{2n}\Big)^{2n}\Big)$.

Question 14.

a) *A priori* P_n est un polynôme de degré $2n$; cependant le coefficient du terme en x^{2n} est égal à $\frac{1}{2i}\Big(\Big(\frac{i}{2n}\Big)^{2n} - \Big(\frac{-i}{2n}\Big)^{2n}\Big) = 0$, donc $\deg \mathrm{P}_n \leqslant 2n-1$. Le nombre $x = \frac{2n}{i}$ n'est pas racine donc les racines de P_n vérifient :

$$\Big(1 + \frac{ix}{2n}\Big)^{2n} = \Big(1 - \frac{ix}{2n}\Big)^{2n} \iff \Big(\frac{2n+ix}{2n-ix}\Big)^{2n} = 1 \iff \frac{2n+ix}{2n-ix} \in \mathbb{U}_{2n} \iff (1+\omega)ix = 2n(\omega - 1) \text{ avec } \omega \in \mathbb{U}_{2n}.$$

$\omega = -1$ est impossible donc on peut poser $\omega = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![-n+1, n-1]\!]$, et dans ce cas $x = \frac{2n}{i} \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} + 1} = 2n\tan\Big(\frac{k\pi}{2n}\Big)$. Nous venons d'obtenir $2n-1$ racines pour P_n donc $\deg \mathrm{P}_n \geqslant 2n-1$, et compte tenu de la remarque faite plus haut, $\deg \mathrm{P}_n = 2n-1$.

b) Considérons le polynôme $\mathrm{Q}_n(x) = x\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}\Big)$. Ce polynôme est de degré $2n-1$ et possède les mêmes racines que P_n, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{P}_n = \lambda \mathrm{Q}_n$.

c) $\mathrm{P}_n'(0)$ est le coefficient de x dans le développement de P_n suivant la base canonique. En utilisant la formule du binôme dans l'expression initiale de P_n on obtient que $\mathrm{P}_n'(0) = \frac{1}{2i}\Big(2n\frac{i}{2n} - 2n\frac{-i}{2n}\Big) = 1$. En utilisant cette fois l'expression obtenue à la question précédente on obtient $\mathrm{P}_n'(0) = \lambda$, donc $\lambda = 1$.

Question 15.

a) ON a $\mathrm{P}_n(x) = x\prod_{k=1}^{n-1} u_k(n,x) = x\prod_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$ puisque $u_k(n,x) = 1$ pour $k \geqslant n$ donc $\sin x = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = x \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$.

b) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n > k$ on a $u_k(n,x) = 1 - \frac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_k(n,x) = 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}$. En admettant qu'on puisse intervertir limite et produit infini on en déduit $\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\Big)$.

c) En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{1}{4k^2}\Big)$; c'est la formule déjà obtenue à la question 12c.