Étude de suites récurrentes (EIVP 1992 - extrait)

Durée : libre

Dans les deux parties de ce problème, on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, un réel a, et la suite (u_n) définie par les relations :

$$u_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

On note E l'ensemble des réels a tels que la suite (u_n) converge, et F l'ensemble des réels a tels que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Partie I.

A. Soit (x_n) une suite réelle. On définit la suite (y_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

Question 1. Montrer que si la suite (x_n) est bornée, il en est de même de la suite (y_n).
Examiner la réciproque.

Question 2. Montrer que si la suite (x_n) est convergente, il en est de même de la suite (y_n), et préciser sa limite.
Réciproquement, si la suite (y_n) est convergente, en est-il de même de la suite (x_n) ?

B. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On suppose qu'il existe deux réels m et α tels que :

$$m \neq 0, \quad \alpha > 1, \quad \text{et} \quad \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^{\alpha}} = m$$

Question 3. Quel est le signe de m ?

Question 4. Soit β un réel, et (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^{\beta}} - \dfrac{1}{u_n^{\beta}}$.
Montrer que la suite (v_n) a une limite finie non nulle pour une unique valeur β_0 de β, que l'on exprimera en fonction de α.

Question 5. On suppose que $\beta = \beta_0$ et que la suite (w_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire un équivalent simple de la suite (u_n), de la forme $u_n \sim \mathrm{L}n^s$, où on exprimera les réels L et s en fonction de m et α.
En déduire la nature de la série $\sum u_n$ en fonction du réel α.

C. Applications

Question 6. On suppose que la fonction f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$.
Déterminer l'ensemble E puis l'ensemble F (on pourra utiliser les suites (v_n) et (w_n) définies dans la partie I.B avec $\alpha = 2$).

Question 7. On suppose que la fonction f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{|x|}}$.
Déterminer l'ensemble E puis l'ensemble F (on pourra utiliser les suites (v_n) et (w_n) définies dans la partie I.B avec une valeur convenable de α).

Partie II.

Dans cette partie on suppose que la fonction f est dérivable sur un voisinage de 0.

Question 8. Montrer que si l'ensemble F est non vide alors $f(0) = 0$.

On suppose cette condition réalisée dans toute la suite de ce problème.

A. On suppose que $|f'(0)| < 1$.

Question 9. Montrer l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que $[-\eta, \eta] \subset \mathrm{F}$.

Question 10. On suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x + x^3}{3}$. Déterminer les ensembles E et F.

B. On suppose que $|f'(0)| > 1$.

Question 11. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement s'il existe un entier p tel que $u_p = 0$.
Si on suppose de plus F injective, à quoi est égal l'ensemble F ?

Question 12. On suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ et $f(-1) = 0$. Déterminer les ensembles E et F.

C. On suppose que $f'(0) = -1$.

Question 13. On suppose en plus que f est dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) \in]-1, 0[$.
Déterminer les ensembles E et F.

Question 14. On suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\operatorname{sh} x$. Déterminer les ensembles E et F.