Corrigé : étude de suites récurrentes (EIVP 1992 - extrait)

Partie I.

A.

Question 1. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leqslant M$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} M = M$$

donc la suite (y_n) est elle aussi bornée.
La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = (-1)^n n$. On calcule :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad y_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}\sum_{k=0}^{p}(x_{2k} + x_{2k+1}) = -\frac{p+1}{2p+2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_{2p} = \frac{1}{2p+1}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(x_{2k} + x_{2k+1}) + x_{2p}\Big) = \frac{1}{2p+1}\big(-p + 2p\big) = \frac{p}{2p+1}$$

Les deux sous-suites (y_{2p+1}) et (y_{2p}) convergent (respectivement vers $-1/2$ et $1/2$) donc sont bornées ; la suite (y_n) est donc bornée sans que la suite (x_n) le soit.

Question 2. Notons ℓ la limite de la suite (x_n), et considérons un réel $\epsilon > 0$. Par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|x_k - \ell| \leqslant \epsilon$. Pour tout $n \geqslant N$ on a :

$$|y_n - \ell| = \frac{+}{n+1}\Big|\sum_{k=0}^{n}\big(x_k - \ell\big)\Big| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k - \ell| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1}|x_k - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N}^{n}|x_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N-1}|x_k - \ell| + \frac{n-N+1}{n+1}\epsilon = \alpha_n$$

On a $\lim \alpha_n = \epsilon$ donc il existe un rang $N' \geqslant N$ tel que $\alpha_n \leqslant 2\epsilon$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant N'$ on a $|y_n - \ell| \leqslant 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim y_n = \ell$.
La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$. On calcule :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad y_{2p+1} = \frac{1}{2p+2}\sum_{k=0}^{p}(x_{2k} + x_{2k+1}) = 0$$

$$y_{2p} = \frac{1}{2p+1}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(x_{2k} + x_{2k+1}) + x_{2p}\Big) = \frac{1}{2p+1}$$

donc $\lim y_{2p+1} = \lim y_{2p} = 0$, ce qui prouve que la suite (y_n) converge alors que la suite (x_n) diverge.

B.

Question 3. Si on avait $m > 0$ la suite (u_n) serait croissante à partir d'un certain rang et ne pourrait en conséquence converger vers 0. On a donc nécessairement $m < 0$.

Question 4. Puisque $m \neq 0$ on peut écrire $u_{n+1} - u_n \sim m u_n^{\alpha}$ et donc $u_{n+1} = u_n + m u_n^{\alpha} + o(u_n^{\alpha})$.
Ainsi, $u_{n+1}^{-\beta} = u_n^{-\beta}\big(1 + m u_n^{\alpha-1}\big)^{-\beta}$. On a $\alpha - 1 > 0$ donc $\lim u_n^{\alpha-1} = 0$ et ainsi

$$u_{n+1}^{-\beta} = u_n^{-\beta}\big(1 - \beta m u_n^{\alpha-1} + o(u_n^{\alpha-1})\big) = u_n^{-\beta} - \beta m u_n^{\alpha-1-\beta} + o(u_n^{\alpha-1-\beta})$$

Ce calcul montre que pour $\beta \neq 0$, $v_n \sim -\beta m u_n^{\alpha-1-\beta}$ donc $\lim v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > \alpha - 1 \\ -\beta m & \text{si } \beta = \alpha - 1 = \beta_0 \\ 0 & \text{si } \beta < \alpha - 1 \end{cases}$

Question 5. Pour $\beta = \beta_0$ la suite (v_n) converge vers $-\beta_0 m$ donc d'après la question 2 la suite (w_n) converge aussi vers $-\beta_0 m$.
Or par télescopage, $w_n = \dfrac{1}{n+1}\Big(\dfrac{1}{u_{n+1}^{\beta_0}} - \dfrac{1}{u_0^{\beta_0}}\Big)$ et puisque $\lim \dfrac{1}{u_{n+1}^{\beta_0}} = 0$ on a $w_n \sim \dfrac{1}{(n+1)u_{n+1}^{\beta_0}}$.
Ainsi, $\lim n u_n^{\beta_0} = \dfrac{-1}{\beta_0 m}$ et $u_n \sim \big(-\beta_0 m\big)^{-1/\beta_0} n^{-1/\beta_0} = \mathrm{L} n^s$ avec $s = \dfrac{1}{1-\alpha}$ et $\mathrm{L} = \big(m(1-\alpha)\big)^s$.
La série $\sum u_n$ (à terme général positif) est donc convergente si et seulement si $s < -1$, ce qui équivaut à $\alpha < 2$.

C. Applications

Question 6. Dans cette question on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) décroit.
Si cette suite converge vers une limite ℓ on doit avoir par passage à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \ell - \ell^2$, soit $\ell = 0$. S'agissant d'une suite décroissante elle doit donc être à valeurs positives.

- Si $a < 0$ la suite (u_n) ne peut donc converger vers 0 ; elle diverge vers $-\infty$;
- si $a > 1$ on a $u_1 < 0$ donc pour les mêmes raisons, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
- si $0 \leqslant a \leqslant 1$ on a $f([0,1]) \subset [0,1]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. La suite (u_n) décroit et est minorée, elle converge (vers 0).

On a donc $\mathrm{E} = [0,1]$.

Rappelons que si $\sum u_n$ converge alors $\lim u_n = 0$, donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
Considérons donc $a \in]0,1[$. La suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, converge vers 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n^2} = -1$ donc on peut appliquer le résultat de la question 5 : la série $\sum u_n$ diverge.
Si $a = 0$ la suite (u_n) est nulle ; si $a = 1$ la suite (u_n) est nulle pour $n \geqslant 1$; on a donc $\mathrm{F} = \{0,1\}$.

Question 7. Si $a > 0$ on établit sans peine par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+\sqrt{u_n}} < 1$ donc la suite (u_n) décroit. Étant minorée par 0 elle converge vers une limite ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = 0$.
Si $a < 0$ on établit de même que la suite (u_n) croit et converge vers 0.
Si $a = 0$ la suite (u_n) est la suite nulle, donc $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

Si $a > 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n\Big(\dfrac{1}{1+\sqrt{u_n}} - 1\Big) \sim -u_n\sqrt{u_n}$ donc on peut appliquer le résultat de la question 5 avec $\alpha = 3/2$: la série $\sum u_n$ converge.
Si $a < 0$ on procède de même avec la suite $(-u_n)$; on a donc $\mathrm{F} = \mathbb{R}$.

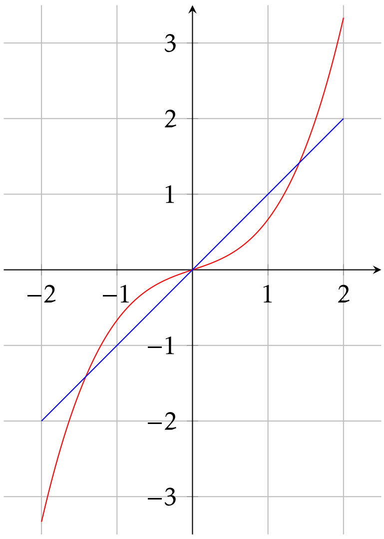
Partie II.

Question 8. Si F est non vide, il existe une valeur de a pour laquelle la série $\sum u_n$ converge. En particulier on a $\lim u_n = 0$. Mais f est continue en 0 (car dérivable) donc $\lim f(u_n) = f(0)$, et le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ fournit l'égalité $f(0) = 0$.

A.

Question 9. Si $|f'(0)| < 1$, considérons un réel k tel que $|f'(0)| < k < 1$.
Puisque $\lim\limits_0 \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta, \eta]$, $\Big|\dfrac{f(x)}{x}\Big| \leqslant k$, soit $|f(x)| \leqslant k|x|$.
Puisque $k < 1$ on a $f([-\eta,\eta]) \subset [-\eta,\eta]$ donc si $a \in [-\eta,\eta]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-\eta,\eta]$.
Ainsi, pour tout $n \in /\mathrm{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$, ce qui permet d'établir par récurrence que $|u_n| \leqslant k^n|a|$.
La série $\sum k^n$ étant convergente (on a $0 < k < 1$) il en est de même de $\sum |u_n|$, puis de $\sum u_n$ par convergence absolue. On a donc $[-\eta,\eta] \subset \mathrm{F}$.

Question 10. Représentons le graphe conjoint des fonctions f et Id :



L'équation $f(x) = x$ possède trois solutions : $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Outre $\pm\infty$, ce sont les seules limites envisageables.
Si a est égal à l'une de ces trois valeurs, la suite (u_n) est constante donc convergente.

Étudions maintenant les autres cas de figure possible, en s'appuyant sur le graphique ci-contre.

– Si $a < -\sqrt{2}$ on a $f\big(]-\infty,-\sqrt{2}[\big) =]-\infty,-\sqrt{2}[$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty,-\sqrt{2}[$ (récurrence élémentaire).
Pour tout $x \in]-\infty,-\sqrt{2}[$, $f(x) < x$ donc $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante ; elle possède une limite finie ou infinie ℓ vérifiant $\ell < -\sqrt{2}$ donc diverge vers $-\infty$.

– Si $-\sqrt{2} < a < 0$ on a $f\big(]-\sqrt{2},0[\big) =]-\sqrt{2},0[$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\sqrt{2},0[$.
Pour tout $x \in]-\sqrt{2},0[$, $f(x) > x$ donc $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est strictement croissante ; elle est majorée donc possède une limite finie $\ell \in]-\sqrt{2},0]$ donc converge vers 0.

– Si $0 < a < \sqrt{2}$ on a $f(]0,\sqrt{2}[) =]0,\sqrt{2}[$ et pour tout $x \in]0,\sqrt{2}[$, $f(x) < x$ donc (u_n) est décroissante et minorée ; elle converge vers 0.

– Si $\sqrt{2} < a$ on a $f(]\sqrt{2},+\infty[) =]\sqrt{2},+\infty[$ et pour tout $x \in]\sqrt{2},+\infty[$, $f(x) > x$ donc (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.

On a donc $\mathrm{E} = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Passons maintenant à F : pour que la série $\sum u_n$ converge il est nécessaire que $\lim u_n = 0$ et donc que $a \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

Lorsque $a \neq 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1+u_n^2}{3}$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3}$. d'après le critère de d'Alembert la série (de signe constant) $\sum u_n$ converge. On a donc $\mathrm{F} =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

B.

Question 11. Si $|f'(0)| > 1$, considérons un réel k tel que $1 < k < |f'(0)|$.
Puisque $\lim\limits_0 \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\eta,\eta]$, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \geqslant k$, soit $|f(x)| \geqslant k|x|$.
Supposons la série $\sum u_n$ convergente ; la suite (u_n) converge donc vers 0. Ainsi, il existe un rang p à partir duquel $|u_n| \leqslant \eta$.
On a donc pour tout $n \geqslant p$, $|u_{n+1}| \geqslant k u_n$ puis $|u_n| \geqslant k^{n-p}|u_p|$ (récurrence facile).
Mais si on avait $|u_p| > 0$ ceci impliquerait $\lim |u_n| = +\infty$, ce qui ne ce peut. On a donc $u_p = 0$.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$ alors pour tout $n \geqslant p$, $u_n = 0$ (car $f(0) = 0$). La série $\sum u_n$ est donc convergente.

En conclusion, $a \in \mathrm{F}$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$. En particulier, lorsque f est injective, pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq f(0) = 0$ et ainsi, $\mathrm{F} = \{0\}$.

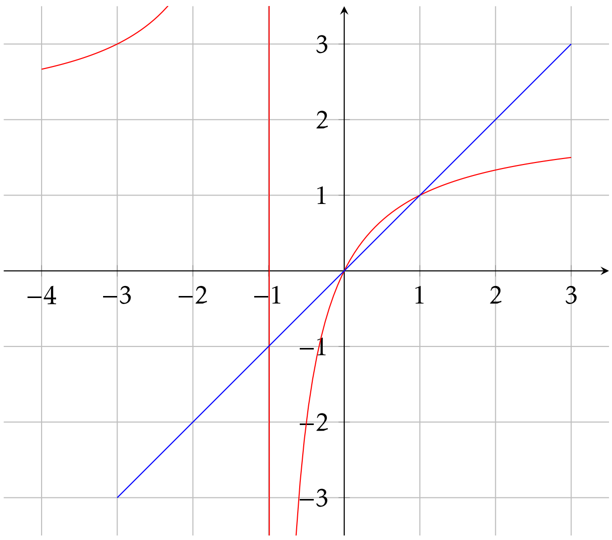
Question 12. Représentons le graphe conjoint des fonctions f et Id. On y fait les constatations suivantes :

– l'intervalle $[1,+\infty[$ est stable et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $f(x) \leqslant x$;

– l'intervalle $]0,1]$ est stable et pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) \geqslant x$;

– $f(]-\infty,-1[) =]2,+\infty[\subset]1,+\infty[$;

– $\forall x \in]-1,0[$, $f(x) < x$.



On en déduit les résultats suivants :

– si $a \geqslant 1$ la suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 ;
– si $0 < a \leqslant 1$ la suite (u_n) est croissante et tend vers 1 ;
– si $a = 0$, la suite est constante et tend donc vers 0 ;
– si $a < -1$ alors $u_1 \in]1, +\infty[$ et d'après le premier cas, la suite (u_n) décroit à partir du rang 1 et converge vers 1.

Reste le cas où $-1 \leqslant a < 0$. Tant que u_n reste dans l'intervalle $]-1, 0[$ la suite décroit. Mais les seules limites finies sur 0 et 1 donc il existe un rang N pour lequel $u_{\mathrm{N}} \leqslant -1$. Deux cas de figure sont alors possibles :

– si $u_{\mathrm{N}} = -1$ alors $u_{\mathrm{N}+1} = 0$ et la suite stationne en 0 ;
– si $u_{\mathrm{N}} < -1$ alors $u_{\mathrm{N}+1} > 1$ et la suite (u_n) décroit à partir du rang $\mathrm{N}+1$ et converge vers 1.

Ainsi, on a montré que $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

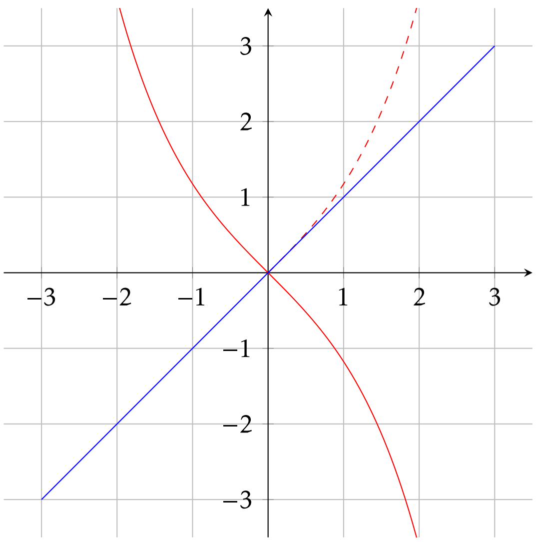
Les valeurs a qui appartiennent à F sont donc celles pour lesquelles la suite stationne en 0, autrement dit $a = 0$ ou les valeurs de $a \in]-1, 0[$ pour lesquelles il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\mathrm{N}} = -1$.
On a $u_{\mathrm{N}} = f^{\mathrm{N}}(a)$ soit $a = f^{-\mathrm{N}}(-1)$. On a $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2-x}$ donc les valeurs non nulles a de F sont les termes de la suite définie par $a_0 = -1$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2-a_n}$.
Les premiers termes $-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{7}, -\dfrac{1}{15} \ldots$ nous permettent de deviner (puis de prouver par récurrence) que $a_n = \dfrac{-1}{2^{n-1}-1}$ donc en définitive, $\mathrm{F} = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{-1}{2^k - 1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

C.

Question 13. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant |x|$ donc $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$: la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Étant minorée par 0 elle converge vers une limite ℓ vérifiant $\ell = |f(\ell)|$, soit $f(\ell) = \ell$ ou $f(\ell) = -\ell$.
Posons $g : x \mapsto f(x) - x$ et $h : x \mapsto f(x) + x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant -1 < 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = f'(x) + 1 > 0$ donc ces deux fonctions sont strictement monotones. Elles s'annulent donc au plus une fois, et plus précisément en 0 puisque $f(0) = 0$. On a donc $\ell = 0$, et $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

D'après l'égalité des accroissements finis cette fois, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ il existe c_x strictement compris entre 0 et x et tel que $f(x) = xf'(c_x)$. Sachant que $f'(c_x) < 0$ on en déduit que x et $f(x)$ sont de signes contraires, et donc que la suite (u_n) est alternée. D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, la série $\sum u_n$ converge, et ainsi $\mathrm{F} = \mathbb{R}$.

Question 14.



Posons $v_n = |u_n|$. la suite (v_n) vérifie les relations $v_0 = |a| \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{sh}(v_n)$.
Or $\mathrm{sh}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \leqslant x$ donc si $a > 0$ la suite (v_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
Il résulte de ceci que si $a \neq 0$ la suite (u_n) est divergente, et donc que $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \{0\}$.