Autour des sommes d'Euler (Centrale MP 2015 – extrait)

Durée : libre

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de la valeur de la fonction ζ en certains points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

I. A –

Q 1. Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

Q 2. Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \mathrm{A} + \mathrm{o}(1)$. En déduire que $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.

I. B – Soit r un entier naturel.

Q 3. Pour quelles valeurs de r la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I. C –

Q 4. Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

Q 5. En déduire que la fonction $t \longmapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I. D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on note :

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}^{\epsilon}_{p,q} = \int_{\epsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t.$$

Q 6. Montrer que l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

Q 7. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \epsilon \in]0,1[, \quad \mathrm{I}^{\epsilon}_{p,q} = -\frac{q}{p+1} \mathrm{I}^{\epsilon}_{p,q-1} - \frac{\epsilon^{p+1} (\ln \epsilon)^q}{p+1}$.

Q 8. En déduire que l'on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_{p,q} = -\frac{q}{p+1} \mathrm{I}_{p,q-1}$.

Q 9. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I. E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Q 10. Montrer que $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.

I. F –

Q 11. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$\mathrm{S}_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} \, \mathrm{d}t.$$

Q 12. Établir que l'on a alors $\mathrm{S}_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t} \, \mathrm{d}t$.

Q 13. En déduire que $\mathrm{S}_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \, \mathrm{d}t$, puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.