Corrigé : autour des sommes d'Euler (Centrale MP 2015 – extrait)

I Représentation intégrale de sommes de séries

I. A –

Q 1. On a $a_n = \dfrac{1}{n} + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum a_n$ converge absolument, donc converge.

Q 2. On a $\mathrm{H}_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(a_k + \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) = 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\mathrm{H}_n - \ln n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$. En posant $\mathrm{A} = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$ on a donc $\mathrm{H}_n = \ln n + \mathrm{A} + \mathrm{o}(1)$, et en particulier $\mathrm{H}_n = \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$, soit $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.

I. B –

Q 3. On a $\dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} \sim \dfrac{\ln n}{n^r}$ donc :

– si $r \leqslant 1$ alors $\dfrac{1}{n^r} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}\Big)$. Mais $\sum \dfrac{1}{n^r}$ diverge, donc $\sum \dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ aussi ;

– si $r > 1$ alors, en choisissant $\alpha \in]1, r[$ on a $\dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$ et puisque $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, $\sum \dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ aussi.

En résumé, $\sum \dfrac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r}$ converge si et seulement si $r > 1$.

I. C –

Q 4. Pour tout $t \in]-1, 1[$ on a $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{t^p}{p}$ et $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} t^q$.

Q 5. On en déduit que le produit de ces deux fonctions est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$, et on obtient le développement du produit en réalisant le produit de Cauchy de ces deux séries :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\Big)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{H}_n t^n.$$

I. D –

Q 6. Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{0} t^p(\ln t)^q = 0$ donc l'intégrale $\mathrm{I}_{p,q}$ est faussement impropre.

Si $p = 0$ alors $(\ln t)^q \underset{0}{=} \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big)$, et puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge, il en est de même de $\mathrm{I}_{0,q}$.

Q 7. On réalise une intégration par parties : $\mathrm{I}^{\epsilon}_{p,q} = \Big[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\Big]_{\epsilon}^{1} - \dfrac{q}{p+1}\displaystyle\int_{\epsilon}^{1} t^p(\ln t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{\epsilon^{p+1}(\ln\epsilon)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$.

Q 8. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient, sachant que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon(\ln\epsilon)^q = 0$, $\mathrm{I}_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$.

Q 9. On en déduit par récurrence $\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^q}\mathrm{I}_{p,0}$ puis sachant que $\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$ on obtient $\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

I. E –

Q 10. On a $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n (\ln t)^{r-1}\,\mathrm{d}t$. Posons $f_n : t \mapsto a_n t^n (\ln t)^{r-1}$ et appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

– les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1]$ d'après la question 6 ;

– la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme $t \mapsto (\ln t)^{r-1} f(t)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$;

– on a $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = |a_n|\frac{(r-1)!}{(n+1)^r}$ et par hypothèse la série $\displaystyle\sum \frac{|a_n|}{(n+1)^r}$ converge.

Toutes les hypothèses sont réunies, donc $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{I}_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ d'après la question 9.

I. F –

Q 11. Pour tout entier $r \geqslant 2$ on peut appliquer l'égalité précédente avec $a_n = \mathrm{H}_n$ pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}_n t^n\Big) \mathrm{d}t = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

d'après la question 5.

Q 12. Réalisons l'intégration par parties représentée par le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{c|cc|} + & \dfrac{(\ln t)^{r-1}}{(r-1)!} & \dfrac{\ln(1-t)}{1-t} \\ - & \dfrac{(\ln t)^{r-2}}{t(r-2)!} & -\dfrac{1}{2}(\ln(1-t))^2 \end{array}$$

Le calcul est licite car $\displaystyle\lim_{t\to 0} (\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1} (\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 = 0$.

On obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 13. En particulier pour $r = 2$ on obtient $\mathrm{S}_2 = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$ en ayant posé $u = 1-t$.

En appliquant de nouveau la question 10 avec cette fois $r = 3$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)$

donc $\mathrm{S}_2 = \zeta(3)$.