Autour de la formule de Stirling (Centrale PSI 2023 – extrait)

Durée : libre

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q 5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

II. A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $\mathrm{I}_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II. B – Cette sous-partie est consacrée à une démonstration de la formule de Stirling

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \tag{II.1}$$

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 13. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}_-^*, \quad f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).