Corrigé : autour de la formule de Stirling (Centrale PSI 2023 – extrait)

I Intégrale de Gauss

Q 1. Au voisinage de $+\infty$ $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 2. Notons $h(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est définie et continue sur $[0,1]$ donc $f(x)$ est bien définie.
Pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est paire donc la fonction f est paire.
Enfin, $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

Q 3. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral sur l'intervalle $[-a,a]$ avec $a > 0$:
- pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$;
- pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}$;
- pour tout $x \in [-a,a]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a = \phi(t)$.

La fonction ϕ est intégrable sur $[0,1]$ donc le théorème s'applique : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a,a]$, puis sur $\mathbb{R}$ par recouvrement, et $f'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 4. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, g est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Q 5. Pour tout $x \neq 0$, le changement de variable $u = tx$ donne : $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2g'(x)g(x)$, égalité qui se prolonge pour $x = 0$ par continuité.

Q 6. On en déduit en intégrant l'existence d'une constante K telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -g(x)^2 + \mathrm{K}$, puis, sachant que $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g(x)^2$.

Q 7. Appliquons le théorème d'interversion limite/intégrale à la fonction f :
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$;
- pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x,t) = 0$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|h(x,t)\big| \leqslant \dfrac{1}{t^2+1} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est intégrable sur $[0,1]$ donc le théorème s'applique : $\displaystyle\lim_{+\infty} f(x) = \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$.
De ceci il résulte que $\displaystyle\lim_{+\infty} g(x)^2 = \frac{\pi}{4}$ puis, sachant que g est positive sur $\mathbb{R}_+$, que $\displaystyle\lim_{+\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

II. A –

Q 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n\,\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge donc I_n est une intégrale convergente.

Q 9. Réalisons un changement de variable : $\displaystyle\int_0^a t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + (n+1)\int_0^a t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis faisons tendre a vers $+\infty$: on obtient $\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n$.
Sachant que $\mathrm{I}_0 = 1$ on en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = n!$.

II. B –

Q 10. Réalisons le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$. Ce dernier est bijectif donc la nature de l'intégrale n'est pas modifiée, et ainsi $n! = \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(n+y\sqrt{n}\right)^n e^{-n-y\sqrt{n}}\,dy = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}\,dy$.

Q 11. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand on a $-\sqrt{n} \leqslant y$ et alors

$$f_n(y) = \left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n}\right) = \exp\left(-\frac{y^2}{2}+o(1)\right)$$

donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-y^2/2}$.

Q 12. On a $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\lim\limits_{0} q(x) = \frac{1}{2}$. On peut donc prolonger q par continuité sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Q 13. Pour $x \neq 0$ on calcule $\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,du = \frac{1}{x}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+ux}\right)du = \frac{1}{x}\left[u - \frac{1}{x}\ln(1+ux)\right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) = q(x)$ et pour $x = 0$, $\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2} = q(0)$ donc l'égalité est bien vérifiée pour tout $x > -1$.

Q 14. Soit $-1 < x < y$. Pour tout $[0,1]$, $\frac{u}{1+uy} \leqslant \frac{u}{1+ux}$ donc par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{u}{1+uy}\,du \leqslant \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,du$. q est bien une fonction décroissante.

Considérons maintenant un réel $y \in \mathbb{R}$.
Si $y < -\sqrt{n}$ alors $f_n(y) = 0 \leqslant e^{-y^2/2}$.
Si $y \geqslant -\sqrt{n}$ alors $f_n(y) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n}\right) = \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)$. La fonction q étant décroissante, on en déduit :

- si $-\sqrt{n} \leqslant y < 0$ alors $f_n(y) \leqslant \exp\left(-y^2 q(0)\right) = e^{-y^2/2}$;
- si $y \geqslant 0$ alors $\frac{y}{\sqrt{n}} \leqslant y$ donc $f_n(y) \leqslant \exp\left(-y^2 q(y)\right) = (1+y)e^{-y}$.

Q 15. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy$:

- d'après la question 11 la suite (f_n) converge simplement vers $f : y \mapsto e^{-y^2/2}$, fonction continue par morceaux ;
- d'après la question 14, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f_n(y) \leqslant \phi(y)$ avec $\phi(y) = \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \\ e^{-y^2/2} & \text{si } y < 0 \end{cases}$;
- la fonction ϕ est continue par morceaux, $\phi(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-y/2})$ et $\phi(x) \underset{-\infty}{=} O(e^{y/2})$ donc la fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ d'après la première partie.
Mais d'après la question 10 on a $n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy$, donc $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.