

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS (CENTRALE PSI 2019 – EXTRAIT)

Durée : libre

La partie I de ce problème permet de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de M .

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k , par la relation $M^{k+1} = MM^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E , on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k , par la relation $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p .

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I Premiers résultats

Q 1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q 2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q 4. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

Q 5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .

I.B – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

Q 6. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et que $2r \leq n$.

Q 7. On suppose que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .

Q 8. Donner la matrice de u dans cette base.

Q 9. On suppose $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\text{Ker}(u)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .

Q 10. Quelle est la matrice de u dans cette base?

I. C – Valeurs propres d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 11. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A .

Q 12. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables?

Q 13. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q 14. Montrer la réciproque de la question 11.

I. D – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$.

On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A .

Q 15. Calculer la trace et le rang de A . En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A . Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q 16. Démontrer que A est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P \text{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R .

Q 17. Démontrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q 18. En déduire l'ensemble des racines carrées de A . **Indication** : on pourra considérer $R' = P^{-1} R P$.

On se propose maintenant d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q 19. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6 , puis l'ensemble des solutions de l'équation.

Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q 20. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q 21. Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice au moins 2 et admettant au moins une racine carrée.

II Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

II. A – Réduction des matrices nilpotentes

On suppose $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

Q 22. Démontrer que $\text{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

Q 23. Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

Q 24. Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

Q 25. Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.

Q 26. Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.