

CORRIGÉ : ENDOMORPHISMES NILPOTENTS (CENTRALE PSI 2019 – EXTRAIT)

I Premiers résultats

Q 1. Le seul endomorphisme nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.

I.A – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q 2. u^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Supposons l'existence d'une famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ non identiquement nulle telle que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$, et notons i le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$. On a ainsi $\lambda_i u^i(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. En composant cette égalité par u^{p-1-i} on obtient, sachant que $u^k(x) = 0$ pour $k \geq p$: $\lambda_i u^{p-1}(x) + 0 = 0$, ce qui est absurde puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$ et qu'on a supposé $\lambda_i \neq 0$. On en déduit que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Sachant que $\dim E = 2$ on en déduit que $p \leq 2$, puis que $p = 2$.

Q 4. Puisque $u^2 = u \circ u = 0$ on a déjà $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = 2$, donc deux cas sont possibles : ou bien $\dim(\text{Im } u) = 0$ et $\dim(\text{Ker } u) = 2$, mais alors $u = 0$ et $p = 1$ ce qui est exclu, ou bien $\dim(\text{Im } u) = \dim(\text{Ker } u) = 1$, auquel cas $\text{Im } u = \text{Ker } u$.

Q 5. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. On pose $e_1 = x$ et $e_2 = u(x)$. D'après Q3 la famille (e) est libre donc est une base de E , et on a bien $\text{Mat}_{(e)}(u) = J_2$.

I.B – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q 6. On a $u \circ u = 0$ donc $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. D'après le théorème du rang, $\text{rg } u \leq \dim(\text{Ker } u) = n - \text{rg } u$ donc $2r \leq n$.

Q 7. Supposer $\text{Im } u = \text{Ker } u$ implique $2r = n$. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker } u$; on a donc $\dim H = r$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H . On sait que la restriction de u à H définit un isomorphisme entre H et $\text{Im } u$ donc $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im } u$. Puisque $E = \text{Im } u \oplus H$ on en déduit que $(e_1, u(e_1), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .

Q 8. Puisque $u^2 = 0$ la matrice associée à u dans cette base est la matrice $\text{diag}(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_{r \text{ fois}}) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})$.

Q 9. On procède comme en Q7 : $(e_1, \dots, e_r)$ est une base d'un supplémentaire H de $\text{Ker } u$, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est alors une base de $\text{Im } u$ qu'on peut compléter par des vecteurs $v_1, \dots, v_{n-2r}$ pour former une base de $\text{Ker } u$ puisque $\text{Im } u \subsetneq \text{Ker } u$. On obtient en concaténant une base de $E = H \oplus \text{Ker } u$.

Q 10. Dans cette base la matrice associée à u est $\text{diag}(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_{r \text{ fois}}, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{n-2r \text{ fois}})$.

I.C – Valeurs propres d'une matrice nilpotente

Q 11. Soit λ une valeur propre de A , et X un vecteur propre associé à λ . On a $AX = \lambda X$ et $A^p X = \lambda^p X$ donc si A est nilpotente d'indice p , $\lambda^p X = 0$ et donc $\lambda = 0$ puisque $X \neq 0$.

Q 12. Ainsi, si A est nilpotente et diagonalisable elle est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0)$ donc à la matrice nulle. On a donc $A = 0$; c'est la seule matrice nilpotente et diagonalisable.

Q 13. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle, (e) la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $H_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$. Puisque T est triangulaire inférieure à diagonale nulle, on a $T(H_k) \subset H_{k+1}$ pour $k \leq n-1$ et $T(H_n) = \{0\}$. On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $T^i(H_k) \subset H_{k+i}$ pour $k \leq n-i$ et $T^i(H_k) = \{0\}$ sinon. En particulier, $T^n(\mathbb{C}^n) = T^n(H_1) = \{0\}$, ce qui signifie que $T^n = 0$: la matrice T est nilpotente. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à une matrice triangulaire inférieure, et sur sa diagonale se trouvent ses valeurs propres, nulles d'après Q11.

Q 14. Si 0 est l'unique valeur propre de A , cette matrice est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle ; elle est donc nilpotente d'après la question précédente.

I.D – Racines carrées de matrices nilpotentes

Q 15. On calcule $\text{tr } A = 1 + 6 - 7 = 0$ et $\text{rg } A = 1$ puisque les deuxième et troisième colonne de A sont proportionnelles à la première. 0 est donc valeur propre au moins d'ordre 2 de A , et s'il existait une autre valeur propre non nulle, la trace de A ne pourrait être nulle, donc $\chi_A(X) = X^3$.

D'après Q14, la matrice A est nilpotente, et un calcul élémentaire donne $A^2 = 0$: son indice de nilpotence est donc 2.

Q 16. La matrice A vérifie les hypothèses de la question Q10 donc A est semblable à $\text{diag}(J_2, J_1)$. Pour trouver une matrice de passage P laquelle $P^{-1}AP = \text{diag}(J_2, J_1)$, on suit la démarche de Q9 : $e_1 = (1, 0, 0) \notin \text{Ker } A$ donc $H = \text{Vect}(e_1)$ est un supplémentaire de $\text{Ker } u$. On pose $e_2 = Ae_1 = (1, 2, 1) \in \text{Ker } A$, qu'on complète par un autre vecteur de $\text{Ker } A$, par

exemple $v_1 = (-3, 1, 0)$. Ceci nous donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 17. Soit $x = u(y) \in \text{Im } u$. Alors $\rho(x) = \rho \circ u(y) = \rho^3(y) = u \circ \rho(y) \in \text{Im } u$ donc $\text{Im } u$ est stable par ρ .

Soit $x \in \text{Ker } u$. Alors $u(\rho(x)) = \rho^3(x) = \rho \circ u(x) = \rho(0) = 0$ donc $\rho(x) \in \text{Ker } u$ et $\text{Ker } u$ est stable par ρ .

On a $\rho^2 = u$ donc $\rho^4 = u^2 = 0$ et ρ est nilpotent.

Q 18. Posons $R' = P^{-1}RP$. Avec les notations de Q16, R' est la matrice de ρ dans la base (e_1, e_2, v_1) , et $\text{Im } u = \text{Vect}(e_2)$,

$\text{Ker } u = \text{Vect}(e_2, e_3)$. D'après Q17 ceci impose à R' d'être de la forme : $R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix}$.

On sait aussi que R' est nilpotente, donc $\chi_{R'}(X) = X^3$. Or on calcule sans peine $\chi_{R'}(X) = (X - a)(X - d)(X - f)$ donc $a = d = f = 0$.

On a donc $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & e \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ce & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin, $R'^2 = A \iff R'^2 = \text{diag}(J_2, J_1)$ donc $R'^2 = A \iff ce = 1$.

Les matrices vérifiant $R'^2 = A$ s'écrivent donc $R = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$.

Q 19. On a $R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R^6 = J_3^3 = 0$. La matrice R est donc nilpotente. D'après Q13 l'indice de nilpotence de

R est inférieur ou égal à sa taille donc à 3. Mais ceci est absurde puisque $R^4 \neq 0$. La matrice J_3 ne possède donc pas de racine carrée.

Q 20. On a $R^{2p} = V^p = 0$ donc R est nilpotente. Toujours d'après Q13 on a donc $R^n = 0$. Mais $R^{2(p-1)} = V^{p-1} \neq 0$ donc $2p - 2 < n$, soit $2p - 1 \leq n$. Par contraposée on en déduit que si $2p - 1 > n$ il n'existe aucune solution.

Q 21. Posons $M = \text{diag}(A, J_1, \dots, J_1)$, la matrice A étant définie au début de la partie I.D. On a $M^2 = \text{diag}(A^2, J_1, \dots, J_1) = 0$ car $A^2 = 0$ donc M est nilpotente d'indice 2, et $M = N^2$ où $N = \text{diag}(R, J_1, \dots, J_1)$, la matrice R étant l'une de celles trouvées à la question Q18.

II Deuxième partie

II.A – Réduction des matrices nilpotentes

Q 22. Pour tout $y \in \text{Im } u$, $u(y) \in \text{Im } u$ donc $\text{Im } u$ est stable par u . Pour tout $y = u(x) \in \text{Im } u$, $u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0$ donc l'induit de u sur $\text{Im } u$ est nilpotent, d'indice inférieur ou égal à $p - 1$.

Par ailleurs, par définition de p il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, ce qui s'écrit aussi $u^{p-2}(y) \neq 0$ en posant $y = u(x) \in \text{Im } u$. L'induit de u sur $\text{Im } u$ est donc nilpotent d'indice $p - 1$.

Q 23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$ donc $C_u(x)$ est stable par u .

Puisque u est nilpotent d'indice p , on a $u^p(x) = 0$ donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0\}$ est non vide et possède donc un plus petit élément, que l'on note $s(x)$.

Q 24. Pour $k \geq s(x)$ on a $u^k(x) = 0$ donc la famille $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ engendre $C_u(x)$. Supposons qu'elle soit liée :

il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{s(x)-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. En notant i le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$ et en

composant par $u^{s(x)-i-1}$ on obtient $\lambda_i u^{s(x)-1}(x) = 0$ soit $u^{s(x)-1}(x) = 0$, ce qui contredit la définition de $s(x)$. Il s'agit donc bien d'une base de $C_u(x)$, et dans cette base, la matrice de l'induit sur $C_u(x)$ est la matrice $J_{s(x)}$.

Q 25. Attention, c'est une question difficile ! Raisonnons par récurrence sur p .

- Si $p = 1$, u est l'endomorphisme nul, et toute base $(x_1, \dots, x_n)$ de E convient puisque $C_u(x_i) = \text{Vect}(x_i)$.
- Si $p \geq 2$, supposons le résultat acquis au rang $p - 1$. D'après Q22 on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'induit

de u sur $\text{Im } u$: il existe des vecteurs $y_1, \dots, y_t$ de $\text{Im } u$ tels que $\text{Im } u = \bigoplus_{i=1}^t C_u(y_i)$.

$y_i \in \text{Im } u$ donc il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$, et d'après Q24, $s(x_i) = s(y_i) + 1$ et $C_u(x_i) = \text{Vect}(x_i) \oplus C_u(y_i)$.

Notons que la famille $(x_1, \dots, x_t)$ est libre : si tel n'était pas le cas, en composant une combinaison de ces vecteurs par u on obtiendrait une combinaison linéaire non triviale de la famille $(y_1, \dots, y_t)$ qui ne serait donc pas libre, en contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

Ceci montre que la somme $H_1 = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_t) \oplus \text{Im } u$ est directe, de dimension $\text{rg } u + t$.

Observons maintenant que $H_1 \cap \text{Ker } u = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i) \cap \text{Ker } u = \bigoplus_{i=1}^t \text{Vect}(u^{s(x_i)-1}(x_i))$. La famille $(u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$ est une famille libre de $\text{Ker } u$, que l'on peut compléter par des vecteurs $x_{t+1}, \dots, x_{n-\text{rg } u}$ pour former une base de $\text{Ker } u$.

Pour chacun de ces vecteurs, $C_u(x_i) = \text{Vect}(x_i)$ donc la somme $H_2 = \bigoplus_{i=t+1}^{n-\text{rg } u} C_u(x_i)$ est directe, de dimension $n - \text{rg } u - t$

et par construction la somme $H_1 \oplus H_2$ est directe donc de dimension $(\text{rg } u + t) + (n - \text{rg } u - t) = n$, donc égale à n . Nous avons montré que la récurrence se propage.

Remarque. Au passage, nous avons montré que l'entier t qui apparaît dans la formule est égal à $n - \text{rg } u$.

Q 26. D'après Q24, la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition est $\text{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)})$.