MARCHE ALÉATOIRE SUR UN GRAPHE (CENTRALE PSI 2021)

Durée : libre

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{A}^\top$ sa transposée.
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions
Un *graphe orienté* G est un ensemble $\mathrm{G} = (\mathrm{S},\mathrm{A})$ où S est un ensemble fini dont les éléments s'appellent les *sommets* du graphe G et où $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}^2$. Les éléments de A s'appellent les *arêtes orientées* du graphe G.
Si $a = (s,s') \in \mathrm{A}$, a est l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s'. Si $(s,s') \in \mathrm{S}^2$, on dit que s' est un sommet *voisin* de s s'il existe une arête orientée reliant s à s', c'est-à-dire si $(s,s') \in \mathrm{A}$.
On note que s peut être un sommet voisin de lui-même (si $(s,s) \in \mathrm{A}$) et que s' peut être un voisin de s alors que s n'est pas un voisin de s' (si $(s,s') \in \mathrm{A}$ alors que $(s',s) \notin \mathrm{A}$).

I Marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n.

Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe en suivant les arêtes orientées du graphe. Le nombre d'étapes de cette marche aléatoire peut tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un de ses sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraine notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on note t_{ij}, la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $t_{i,j} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $t_{i,j}$ est notée T. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition du graphe*.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{P}^{(k)}$ le vecteur ligne $(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_{n-1}^{(k)}, p_n^{(k)})$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

I.A – Résultats généraux

Q 1. Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)} = 1$.

Q 2. Montrer que, pour tout tout entier naturel k, $\mathrm{P}^{(k+1)} = \mathrm{P}^{(k)}\mathrm{T}$.

Q 3. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $\mathrm{P}^{(k)}$ en fonction de T, k et $\mathrm{P}^{(0)}$.

Q 4. On suppose que la suite de vecteurs $\left(\mathrm{P}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $\mathrm{P} = (p_1,\dots,p_n)$. Montrer que $\mathrm{PT} = \mathrm{P}$, que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \geqslant\!\geqslant 0$ et que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

I.B – Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette sous-partie, on considère le graphe orienté $\mathrm{G} = (\mathrm{S},\mathrm{A})$ où

$$\begin{cases} \mathrm{S} = \{1,2,3,4\} \\ \mathrm{A} = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3)\} \end{cases}$$

La figure 1 représente ce graphe en version complète à gauche et en version simplifiée à droite. Les sommets sont représentés par des cercles et l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s', par une flèche de s vers s'. Par la suite, nous utiliserons la représentation simplifiée dans laquelle si le graphe comporte les deux arêtes orientées (s,s') et (s',s) elles sont représentées par un seul trait avec une flèche à chaque extrémité.
On suppose que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe.
On pose

$$\mathrm{J}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

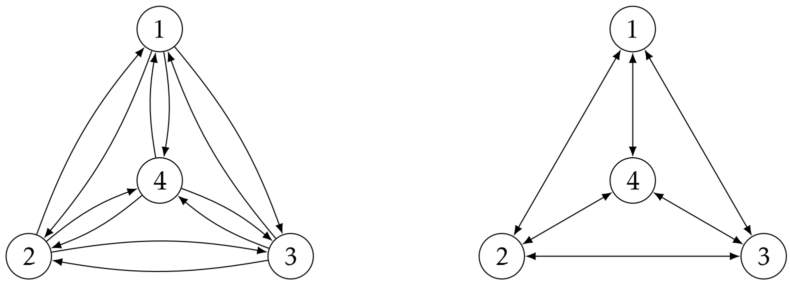

Figure 1 –

Q 5. Exprimer la matrice de transition T en fonction de J_4 et I_4.

Q 6. Démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$T = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^\top$$

Q 7. Montrer que la suite de matrices $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et identifier géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice limite.

Q 8. Montrer que, quel que soit le vecteur ligne $P^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, p_4^{(0)}\right)$, où pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, $p_i^{(0)}$ est la probabilité que le point soit au départ sur le sommet i, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

I. C – Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Dans cette question, on suppose que G est le graphe représenté figure 2.

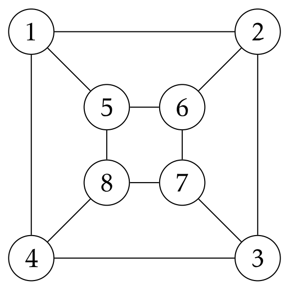

Figure 2 –

On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets à qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que

$$P^{(0)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

On note $S_1 = \{1, 3, 6, 8\}$ et $S_2 = \{2, 4, 5, 7\}$.

Q 9. Donner la matrice de transition T de ce graphe et calculer $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)T$.

Q 10. Montrer que, si le point se trouve sur un sommet de la partie S_1 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de la partie S_2 à l'étape suivante et que, s'il se trouve sur un sommet de S_2 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de S_1 à l'étape suivante.

Q 11. La suite de vecteurs $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

II Matrices stochastiques et distributions de probabilité

Définitions

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une distribution de probabilité si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice *stochastique* si chaque ligne de M est une distribution de probabilité.

II. A –

Q 12. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que M est une matrice stochastique si et seulement si

$$M\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Q 13. Montrer que la matrice de transition d'un graphe (définie dans la partie I) est une matrice stochastique et que, pour tout entier naturel k, le vecteur $P^{(k)}$, lui aussi défini dans la partie I, est une distribution de probabilité.

II. B –

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques, $X \in \mathbb{R}^n$ une distribution de probabilité et $\alpha \in [0,1]$.

Q 14. Montrer que XM est une distribution de probabilité.

Q 15. Montrer que MN est une matrice stochastique.

Q 16. Montrer que $\alpha M + (1-\alpha)N$ est une matrice stochastique.

II. C –

Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre (réelle ou complexe) de M. On note $(u_1, \dots, u_n)$ les composantes (réelles ou complexes), dans la base canonique, d'un vecteur propre u associé à λ.

II. C. 1)

Q 17. Soit $h \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|u_h| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i|$. Montrer que $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$. En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

Q 18. Soit $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,i}$. Montrer que $|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat et montrer que, si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

II. C. 2)

On suppose désormais que tous les coefficients $m_{i,j} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de la matrice stochastique M sont strictement positifs.

Q 19. Démontrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(M - I_n)\big) = 1$. (Si $(u_1, \dots, u_n)$ désigne les composantes réelles dans la base canonique d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(M - I_n)$, on pourra utiliser $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} u_i$.)

Q 20. En déduire qu'il existe au plus une distribution de probabilité X invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $XM = X$.

On pose $\epsilon = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}$.

On s'intéresse à la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de M. On note $m_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de la matrice M^k situé à la ligne i et la colonne j.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on pose

$$\begin{cases}\alpha_j^{(k)} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,j}^{(k)}\\ \beta_j^{(k)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,j}^{(k)}\end{cases}$$

Dans les quatre questions suivantes, j est un entier fixé dans $[\![1,n]\!]$ et k est fixé dans $\mathbb{N}$.

Q 21. Démontrer les inégalités $\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}$.

Q 22. Démontrer qu'il existe un couple $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geqslant m_{i_0,j_0}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$

Q 23. Démontrer qu'il existe un couple $(i_1, j_1) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geqslant m_{i_1,j_1}(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$

Q 24. En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leqslant (1 - 2\epsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.

Q 25. Démontrer que la suite $\left(\mathrm{M}^k\right)$ converge vers une matrice stochastique $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales.

On note P^∞ la ligne $(b_1, \dots, b_n)$.

Q 26. Démontrer que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i > 0$.

Q 27. Démontrer que la suite $\left(\mathrm{P}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\mathrm{P}^{(0)}\mathrm{M}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers P^∞, quelle que soit la distribution de probabilité initiale $\mathrm{P}^{(0)}$.

Q 28. Démontrer que P^∞ est l'unique distribution de probabilité P invariante par M, c'est-à-dire vérifiant $\mathrm{PM} = \mathrm{P}$.