

# AUTOUR DES MATRICES DE TOEPLITZ (CENTRALE PSI 2018)

Durée : libre

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2,  $\mathcal{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs tels que  $a \leq b$ ,  $[[a, b]]$  désigne l'ensemble  $\{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$ .  $\mathbb{K}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$ , on note  $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$  la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre  $n$ . On nomme  $\text{Toep}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  :

$$\text{Toep}_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}, M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) \right\}$$

Une matrice  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *nilpotente* s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0$ . On admettra qu'une telle matrice vérifie  $N^n = 0$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\chi_M$  son polynôme caractéristique défini par  $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ .

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) est un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ ,  $P(M)$  désigne la matrice

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \dots + a_pM^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

## I Généralités et quelques exemples

### I.A – Généralités

- Q 1. Montrer que  $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . En donner une base et en préciser la dimension.
- Q 2. Montrer que si deux matrices  $A$  et  $B$  commutent ( $AB = BA$ ) et si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ , alors  $P(A)$  et  $Q(B)$  commutent.

### I.B – Cas de la dimension 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$  une matrice de Toeplitz de taille  $2 \times 2$ , où  $(a, b, c)$  sont des complexes.

- Q 3. Donner le polynôme caractéristique de  $A$ .
- Q 4. Discuter, en fonction des valeurs de  $(a, b, c)$ , de la diagonalisabilité de  $A$ .

### Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

- Q 5. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  est semblable à une matrice de type  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  ou de type  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des complexes avec  $\alpha \neq \beta$ .

- Q 6. En déduire que toute matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est semblable à une matrice de Toeplitz.

### I. C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme  $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$ , i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où  $(a, b, c)$  sont des complexes.

On fixe  $(a, b, c)$  trois nombres complexes tels que  $bc \neq 0$ . On se propose de chercher les éléments propres de  $A_n(a, b, c)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A_n(a, b, c)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé.

**Q 7.** Montrer que si l'on pose  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 0$ , alors  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les termes de rang variant de 1 à  $n$  d'une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

**Q 8.** Rappeler l'expression du terme général de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \tag{I.1}$$

**Q 9.** À l'aide des conditions imposées à  $x_0$  et  $x_{n+1}$ , montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

**Q 10.** Montrer que  $r_1$  et  $r_2$  sont non nuls et que  $r_1/r_2$  appartient à  $\mathbb{U}_{n+1}$ .

**Q 11.** En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par  $r_1$  et  $r_2$ , déterminer  $r_1 r_2$  et  $r_1 + r_2$ . En déduire qu'il existe un entier  $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et un nombre complexe  $\rho$  vérifiant  $\rho^2 = bc$  tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

**Q 12.** En déduire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que, pour tout  $k$  dans  $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $x_k = 2i\alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$ .

**Q 13.** Conclure que  $A_n(a, b, c)$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

## II Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz  $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ , pour laquelle

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose  $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  et  $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ .

**Q 14.** Calculer  $M_n^2, \dots, M_n^n$ . Montrer que  $M_n$  est inversible et donner un polynôme annulateur de  $M_n$ .

**Q 15.** Justifier que  $M_n$  est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de  $\omega_n$ ) et donner une base de vecteurs propres de  $M_n$ .

**Q 16.** On pose  $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Justifier que  $\Phi_n$  est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice  $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$ .

**Q 17.** Soit  $A$  une matrice circulante. Donner un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $A = P(M_n)$ .

**Q 18.** Réciproquement, si  $P \in \mathbb{C}[X]$ , montrer, à l'aide d'une division euclidienne de  $P$  par un polynôme bien choisi, que  $P(M_n)$  est une matrice circulante.

**Q 19.** Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de  $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ , stable par produit et par transposition.

**Q 20.** Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

### III Étude des matrices cycliques

#### III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $f_M$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $M$ .

**Q 21.** Montrer que si  $M$  est dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{C}^n$  tel que  $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$  est une base de  $\mathbb{C}^n$  ;
- ii.  $M$  est semblable à la matrice  $C(a_0, \dots, a_{n-1})$  définie par

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  sont des nombres complexes.

On dit alors que  $f_M$  est un endomorphisme cyclique, que  $M$  est une matrice cyclique et que  $x_0$  est un vecteur cyclique de  $f_M$ .

Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $f_M$  est diagonalisable. On note  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  où  $(u_1, \dots, u_n)$  sont  $n$  nombres complexes.

**Q 22.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $(u_1, \dots, u_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  pour que  $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$  soit une base de  $\mathbb{C}^n$ .

**Q 23.** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . On s'intéresse aux éléments propres de la matrice  $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ .

**Q 24.** Soit  $\lambda$  un nombre complexe. En discutant dans  $\mathbb{C}^n$  du système  $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$ , montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $C(a_0, \dots, a_{n-1})$  si et seulement si  $\lambda$  est racine d'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  à préciser.

**Q 25.** Si  $\lambda$  est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de  $C(a_0, \dots, a_{n-1})$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et préciser sa dimension.

**Q 26.** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

#### Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient  $M$  une matrice cyclique et  $x_0$  un vecteur cyclique de  $f_M$ . On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en  $f_M$ .

**Q 27.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer que  $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$ .

**Q 28.** Soit  $g \in \mathcal{C}(f_M)$ . Montrer qu'il existe  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  tels que  $g = \alpha_0 \text{Id}_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \dots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$ . **On pourra utiliser la base  $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$  et exprimer  $g(x_0)$  dans cette base.**

**Q 29.** Conclure.

$$\text{Soit } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q 30.** Donner les valeurs propres de  $N$  et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable?

**Q 31.** La matrice  $N$  est-elle cyclique?

**Q 32.** Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec  $N$  est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

### III. B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite du problème, les matrices considérées sont à coefficients réels.

Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une matrice d'ordre  $n$  et  $k$  un entier dans  $\llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$ , on dit que le coefficient  $a_{ij}$  de  $A$  est un coefficient diagonal d'ordre  $k$  si  $j - i = k$ .

On note  $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice définie par  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } j - i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Tous les coefficients de cette matrice sont nuls sauf ses coefficients diagonaux d'ordre  $k$  qui sont égaux aux coefficients diagonaux d'ordre  $k$  de  $A$ .

$$\text{Ainsi, si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $D_k$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux d'ordre  $k$  qui valent 1. Pour tout entier relatif  $k$ , on définit l'espace vectoriel  $\Delta_k$  par

$$\Delta_k = \left\{ M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = 0 \text{ si } j - i \neq k \right\} \quad \text{si } k \in \llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$$

et  $\Delta_k = \{0\}$  sinon. Ainsi,  $\Delta_0$  est l'ensemble des matrices diagonales,  $\Delta_1$  l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre 1,  $\Delta_{-1}$  l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre  $-1$ .

Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , on note  $H_k$  l'espace vectoriel  $\bigoplus_{i=k}^{n-1} \Delta_i$ .

**Q 33.** Montrer que si  $i$  et  $j$  sont dans  $\llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$ , si  $A \in \Delta_i$  et  $B \in \Delta_j$ , alors  $AB \in \Delta_{i+j}$ .

**Q 34.** En déduire que si  $A \in H_i$  et  $B \in H_j$ , alors  $AB \in H_{i+j}$ .

**Q 35.** Soit  $C$  une matrice nilpotente. Montrer que  $I_n + C$  est inversible et que

$$(I_n + C)^{-1} = I_n - C + C^2 - \dots + (-1)^{n-1} C^{n-1}$$

On suppose que  $k \geq 0$  et que  $C$  est une matrice de  $\Delta_{k+1}$ . On pose  $P = I_n + C$ .

**Q 36.** Montrer que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}$ .

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\varphi : M \mapsto P^{-1}MP$ .

**Q 37.** Soient  $i \in \mathbb{N}$  et  $M \in \Delta_i$ . Montrer qu'il existe  $M'$  dans  $H_{k+1}$  tel que  $\varphi(M) = M + M'$ .

**Q 38.** La matrice  $N$  étant la matrice définie en III.A, montrer qu'il existe  $N'$  dans  $H_{k+1}$  tel que

$$\varphi(N) = N + NC - CN + N'$$

**Q 39.** Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure. On pose  $A = N + T$ ,  $B = \varphi(A)$ . Montrer que  $B \in H_{-1}$  et que

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket -1, k-1 \rrbracket, & B^{(i)} = A^{(i)} \\ B^{(k)} = & A^{(k)} + NC - CN \end{cases}$$

### III. C – L'opérateur de Sylvester

On définit les opérateurs

$$\mathcal{S} : \left( \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & NX - XN \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^* : \left( \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & N^T X - XN^T \end{array} \right)$$

**Q 40.** Montrer que le noyau de  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

On admet que le noyau de  $\mathcal{S}^*$  est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

**Q 41.** Montrer que  $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$  et  $\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$ .

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel défini par :  $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle M_1 | M_2 \rangle = \text{tr}(M_1^T M_2)$ .

On note  $\mathcal{S}_{k+1}$  la restriction de  $\mathcal{S}$  à  $\Delta_{k+1}$  et  $\mathcal{S}_k^*$  la restriction de  $\mathcal{S}^*$  à  $\Delta_k$ .

**Q 42.** Vérifier que pour tous  $X$  dans  $\Delta_{k+1}$  et  $Y$  dans  $\Delta_k$ ,  $\langle \mathcal{S}_{k+1} X | Y \rangle = \langle X | \mathcal{S}_k^* Y \rangle$ . En déduire que  $\text{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$  et  $\text{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\Delta_k$ , c'est-à-dire que

$$\Delta_k = \text{Ker}(\mathcal{S}_k^*) \oplus^\perp \text{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$$

**Q 43.** Soient  $T$  une matrice triangulaire supérieure,  $A = N + T$  et  $k \geq 0$ . Montrer que  $A$  est semblable à une matrice  $L$  dont tous les coefficients diagonaux d'ordre  $k$  sont égaux et vérifient  $\forall i \in \llbracket -1, k-1 \rrbracket, L^{(i)} = A^{(i)}$ .

**Q 44.** En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.

