# Corrigé : Corrigé : autour des matrices de Toeplitz (Centrale PSI 2018)

## I Généralités et exemples

### *I. A – Généralités*

**Q 1.** Pour tout $k \in [\![-n+1, n-1]\!]$ posons $E_k = T(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 est placé en position $k+n$). Alors $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(E_{-n+1},\dots,E_{n-1})$ donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et cette famille étant à l'évidence libre, $\dim \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = 2n-1$.

**Q 2.** Posons $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X - j$. Pour tout $(i,j) \in [\![0,p]\!] \times [\![0,q]\!]$, $A^i$ et $B^j$ commutent donc :

$$P(A)Q(B) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} a_i b_j A^i B^j = \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{p} a_i b_j B^j A^i = Q(B)P(A)$$

### *I. B – Cas de la dimension 2*

**Q 3.** $\chi_A(X) = (X-a)^2 - bc$.

**Q 4.** Si $bc \neq 0$, le polynôme caractéristique de A possède deux racines distinctes donc est scindé à racines simples ; dans ce cas A est diagonalisable.
Si $bc = 0$, $a$ est valeur propre d'ordre 2 donc A n'est diagonalisable que si elle est semblable à $aI_2$, autrement dit égale, soit si et seulement si $b = c = 0$.

#### *Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz*

**Q 5.** Si $\chi_M$ possède deux racines distinctes $\alpha \neq \beta$, la matrice M est diagonalisable donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Si $\chi_M$ possède une racine double $\alpha$ alors M est trigonalisable donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

**Q 6.** La seconde de ces deux matrices est déjà une matrice de Toeplitz, donc il suffit de montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de Toeplitz pour conclure par transitivité de la relation de similitude.
On a $(X-\alpha)(X-\beta) = \Big(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$ donc d'après la partie I.B, cette matrice est semblable à $T\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}\Big)$.

### *I. C – Un autre cas particulier : les matrices diagonales*

**Q 7.** $\big(A_n(a,b,c) - \lambda\big)X = 0$ si et seulement si : $(a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0$, $cx_k + (a-\lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0$ pour $k \in: cro1, n-2$ et $cx_{n-1} + (a-\lambda)x_n = 0$ soit, en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$ : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.

**Q 8.** Si l'équation (I.1) possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$, il existe deux nombre complexes $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$. Si l'équation (I.1) possède une racine double $r$, il existe deux nombre complexes $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \alpha r^k + \beta k r^k$.

**Q 9.** Supposons que (I.1) possède une racine double $r$. Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ imposent $\alpha = 0$ et $(\alpha + (n+1)\beta)r^{n+1} = 0$ soit $\beta = 0$ puisque 0 n'est pas racine de (I.1) (car $c \neq 0$). Mais ceci conduit à $X = 0$, ce qui ne se peut s'agissant d'un vecteur propre. On en déduit que (I.1) possède deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$.

**Q 10.** $r_1$ et $r_2$ sont non nuls car $c \neq 0$, et les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ imposent ici $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1} = 0$ donc $\beta = -\alpha$ et $r_1^{n+1} - r_2^{n+1} = 0$, soit $r_1/r_2 \in \mathbb{U}_{n+1}$ puisqu'on ne peut avoir $\alpha = \beta = 0$ sans avoir $X = 0$..

**Q 11.** Les relations entre coefficients et racines donnent $r_1 r_2 = c/b$ et $r_1 + r_2 = (\lambda - a)/b$.
On a $r_1/r_2 \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$ donc il existe $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $r_1/r_2 = e^{2i\ell\pi/(n+1)}$.
En écrivant $r_1^2 = r_1 r_2 \times r_1/r_2$ on obtient $r_1^2 = \frac{c}{b} e^{2i\ell\pi/(n+1)}$ donc il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\rho^2 = bc$ et $r_1 = \frac{\rho}{b} e^{i\ell\pi/(n+1)}$.
On en déduit $r_2 = \frac{\rho}{b} e^{-i\ell\pi/(n+1)}$ puis $\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + 2\rho\cos\Big(\frac{\ell\pi}{n+1}\Big)$.

**Q 12.** Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ on a donc $x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k) = \alpha\frac{\rho^k}{b^k}\Big(e^{ik\ell\pi/(n+1)} - e^{-ik\ell\pi/(n+1)}\Big) = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\Big(\frac{k\ell\pi}{n+1}\Big)$.

**Q 13.** Les questions 11 et 12 ont mis en évidence $n$ valeurs propres distinctes associées à autant de sous-espaces propres de dimension 1 donc $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les $a+2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ pour $\ell \in [\![1,n]\!]$ et $\rho^2 = bc$.

# II Matrices circulantes

**Q 14.** Notons $(e)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme défini par $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = M_n$. On a $u(e_1) = e_n$ et $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $i \in [\![2,n]\!]$ donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u^k(e_i) = e_{i-k}$ pour $i \in [\![k+1,n]\!]$ et $u^k(e_i) = e_{n+i-k}$ si $i \in [\![1,k]\!]$.
La matrice $M_n^k = \mathrm{Mat}_{(e)}(u^k)$ est donc constituée de deux diagonales de 1 débutant aux positions $(n+1-k,1)$ et $(1,k+1)$, les autres coefficients étant nuls.
En particulier, $M_n^n = I_n$ donc $M_n$ est inversible et $M_n^{-1} = M^{n-1}$. Enfin, le polynôme $X^n - 1$ annule $M_n$.

**Q 15.** Si $\lambda$ est valeur propre de $M_n$ alors $\lambda$ est racine de $X^n - 1$ donc il existe $q \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda = \omega_n^{q-1}$. On résout $M_n X = \omega_n^{q-1} X$ pour obtenir un sous-espace propre de dimension 1, engendré par le vecteur X défini par $x_p = \omega_n^{(p-1)(q-1)}$, $1 \leqslant p \leqslant n$. On dispose ainsi de $n$ sous-espaces propres de dimension 1, la matrice $M_n$ est diagonalisable.

**Q 16.** La matrice $\Phi_n$ apparaît comme la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres de $M_n$ donc est inversible, et $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \mathrm{diag}(1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1})$.

**Q 17.** On a immédiatement $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$.

**Q 18.** Considérons la division euclidienne de P par $X^n - 1$ : $P(X) = (X^n-1)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R \leqslant n-1$. Puisque $X^n - 1$ annule $M_n$, $P(M_n) = R(M_n)$, et d'après la question précédente, $R(M_n)$ est une matrice circulante.

**Q 19.** Notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des matrices circulantes de taille $n$. On a déjà $C_n \subset \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, et on vient de montrer que $C_n = \left\{P(M_n) \mid P \in \mathbb{C}[X]\right\}$. Sous cette forme, il devient évident que $A, B \in \mathcal{C}_n \implies \lambda A + B \in \mathcal{C}_n$ et $AB \in \mathcal{C}_n$, donc $\mathcal{C}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit. Enfin, de l'égalité $P(M_n)^T = P(M_n^T)$ on tire que $\mathcal{C}_n$ est stable par transposition.

**Q 20.** De l'égalité de diagonalisation $M_n = \Phi_n D_n \Phi_n^{-1}$ avec $\mathrm{diag}(1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1})$ on tire que $P(M_n) = \Phi_n P(D_n) \Phi_n^{-1}$. Or $P(D_n) = \mathrm{diag}(P(1), P(\omega_n), \dots, P(\omega_n^{n-1}))$ donc $P(M_n)$ est diagonalisable avec les mêmes vecteurs propres que $M_n$, et ses valeurs propres sont $P(1), P(\omega_n), \dots, P(\omega_n^{n-1})$.

# III Matrices cycliques

### *III. A – Endomorphismes et matrices cycliques*

**Q 21.** Supposons (i) vérifié. $f_M^n(x_0) \in \mathbb{C}^n$ donc il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $f_M^n(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f_M^k(x_0)$. Avec ces notations, la matrice associée à $f_M$ dans cette base est la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$, qui est donc semblable à la matrice M.
Supposons (ii) vérifiée. $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est donc la matrice associée à $f_M$ dans une certaine base $(e_1, \dots, e_n)$. En posant $x_0 = e_1$ on obtient par lecture de la matrice que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_k = f_M(e_{k-1})$ donc par récurrence $e_k = f_M^{k-1}(e_1) = f_M^{k-1}(x_0)$.

**Q 22.** On a $f_M(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i e_i$ et plus généralement $f_M^k(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i e_i$. La matrice associée à la famille de vecteurs $\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ dans la base $(e)$ s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} u_1 \\ u_2 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & \lambda_n u_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} u_n \end{pmatrix}$$

et cette famille est une base si et seulement si $\det P \neq 0$. Or $\det P = u_1 u_2 \cdots u_n V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un déterminant de Vandermonde, donc cette famille est une base si et seulement si $u_1, \dots, u_n$ sont non nuls et les $\lambda_i$ deux-à-deux distincts.

**Q 23.** Les deux questions précédentes montrent que si $f_M$ est diagonalisable, une condition nécessaire et suffisante pour que $f_M$ soit cyclique est que $f_M$ possède $n$ valeurs propres *deux-à-deux distinctes*, et que dans ce cas les vecteurs cycliques s'écrivent $x_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ où les $u_1, \dots, u_n$ sont tous non nuls.

**Q 24.** Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et résolvons le système $\begin{cases} C(a_0,\dots,a_{n-1})X = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$.

$$C(a_0,\dots,a_{n-1})X = \lambda X \iff \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \cdots = \cdots \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n \\ \cdots = \cdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_2\lambda - a_1)x_n \\ 0 = (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0)x_n \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système possède une solution non nulle X est donc que $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0$.

**Q 25.** Si cette condition est vérifiée, le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur X défini par $x_n = 1$ et $x_k = \lambda^{n-k} - a_{n-1}\lambda^{n-k-1} - \cdots - a_{k+1}\lambda - a_k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

**Q 26.** Chacun des sous-espaces propres étant de dimension 1, la matrice $C(a_0,\dots,a_{n-1})$ est diagonalisable si et seulement si elle possède $n$ valeurs propres distinctes, autrement dit si et seulement si le polynôme $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

### *Commutant d'un endomorphisme cyclique*

**Q 27.** Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors $f_M \circ P(f_M) = f_m \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k f_M^k\Big) = \sum_{k=0}^{d} a_k f_M^{k+1} = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k f_M^k\Big) \circ f_M = P(f_M) \circ f_M$ donc $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

**Q 28.** Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\big(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Posons $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a, puisque $g$ et $f_M$ commutent, $g\big(f_M^i(x_0)\big) = f_M^i\big(g(x_0)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^{k+i}(x_0) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_M^k\Big)\big(f_M^i(x_0)\big)$. Ceci montre que les endomorphismes $g$ et $\sum_{k=0}^{n-1} f_M^k$ coïncident sur la base $\big(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\big)$ ; ils sont donc égaux.

**Q 29.** Les deux questions précédentes prouvent par double inclusion que $\mathcal{C}(f_M) = \big\{P(f_M) \mid P \in \mathbb{C}[X]\big\}$.

**Q 30.** La matrice N est cyclique avec $N = C(0,\dots,0)$ donc d'après Q24 ses valeurs propres sont les racines du polynôme $X^n$ : 0 est donc la seule valeur propre. D'après Q25, le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par le vecteur $(0,\dots,0,1)$ de $\mathbb{C}^n$. Elle n'est pas diagonalisable.

**Q 31.** Oui, comme dit à la question précédente.

**Q 32.** D'après Q29, les matrices qui commutent avec N s'écrivent $\sum_{k=0}^{n-1} a_k N^k = T(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, 0, \dots, 0)$ ; ce sont bien les matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

### *III. B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

**Q 33.** Le coefficient de rang $(k,l)$ de AB vaut : $(AB)_{kl} = \sum_{m=1}^{n} A_{km}B_{ml}$. On sait que $A_{km} = 0$ si $m - k \neq i$ et $B_{ml} = 0$ si $l - m \neq j$ donc pour que le produit $A_{km}B_{ml}$ soit non nul il faut que $m - k = i$ et $l - m = j$, ce qui impose $l - k = i + j$. Ainsi, si $l - k \neq i + j$ tous les termes de la somme sont nuls, et $(AB)_{kl} = 0$. Ceci prouve que $AB \in \Delta_{i+j}$.

**Q 34.** Si $A \in H_i$, il existe $(A_i, \dots, A_{n-1}) \in \Delta_i \times \cdots \times \Delta_{n-1}$ tel que $A = \sum_{k=i}^{n-1} A_k$.

Si $B \in H_j$, il existe $(B_j, \dots, B_{n-1}) \in \Delta_j \times \cdots \times \Delta_{n-1}$ tel que $B = \sum_{l=j}^{n-1} B_l$.

Ainsi, $AB = \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{l=j}^{n-1} A_k B_l$ avec, d'après la question précédente, $A_k B_l \in \Delta_{k+l}$. Or $k + l \geqslant i + j$ et $\Delta_{k+l} = 0$ si $k + l \geqslant n$ donc $AB \in \bigoplus_{k \geqslant i+j} \Delta_k = H_{i+j}$.

**Q 35.** On calcule $(\mathrm{I}_n+\mathrm{C})\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}^k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\mathrm{C}^k = \mathrm{I}_n - \mathrm{C}^n = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_n+\mathrm{C}$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\mathrm{C}^k$.

**Q 36.** D'après Q33 on a $\mathrm{C}^p \in \Delta_{p(k+1)}$ donc pour $p(k+1)\geqslant n$, $\mathrm{C}^p=0$. La matrice C est nilpotente donc d'après Q35, P est inversible, d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\mathrm{C}^p \in \bigoplus_{p=0}^{n-1}\Delta_{p(k+1)}$.

**Q 37.** D'après Q36, $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_n + \mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q} = \sum_{p=1}^{n-1}(-1)^p\mathrm{C}^p \in \bigoplus_{p=1}^{n-1}\Delta_{p(k+1)} \subset \mathrm{H}_{k+1}$. Ainsi, $\varphi(\mathrm{M}) = (\mathrm{I}_n+\mathrm{Q})\mathrm{M}(\mathrm{I}_n+\mathrm{C}) = \mathrm{M}+\mathrm{M}'$ avec $\mathrm{M}' = \mathrm{QM}+\mathrm{MC}+\mathrm{QMC}$.

On a $\mathrm{Q}\in\mathrm{H}_{k+1}$, $\mathrm{M}\in\Delta_i$ et $\mathrm{MC}\in\Delta_{k+i+1}$ (d'après Q33) donc d'après Q34, $\mathrm{QM}\in\mathrm{H}_{k+1+i}$, $\mathrm{MC}\in\mathrm{H}_{k+1+i}$ et $\mathrm{QMC}\in\mathrm{H}_{2k+2+i}$ donc $\mathrm{M}'\in\mathrm{H}_{k+1+i}\subset\mathrm{H}_{k+1}$.

**Q 38.** On a ici $\varphi(\mathrm{N}) = \mathrm{N}+\mathrm{QN}+\mathrm{NC}+\mathrm{QNC} = \mathrm{N}+\mathrm{NC}-\mathrm{CN}+\mathrm{N}'$ avec $\mathrm{N}' = (\mathrm{Q}+\mathrm{C})\mathrm{N}+\mathrm{QNC}$. Compte tenu de l'expression de Q, on a $\mathrm{Q}+\mathrm{C}\in\mathrm{H}_{2(k+1)}$ et $\mathrm{N}\in\Delta_{-1}$ donc $(\mathrm{Q}+\mathrm{C})\mathrm{N}\in\mathrm{H}_{2k+1}$ et $\mathrm{QNC}\in\mathrm{H}_{2k+1}$ donc $\mathrm{N}'\in\mathrm{H}_{2k+1}\subset\mathrm{H}_{k+1}$.

**Q 39.** On a $\mathrm{N}\in\Delta_{-1}$ et $\mathrm{T}\in\mathrm{H}_0$ donc $\mathrm{A}\in\mathrm{H}_{-1}$. Puisque $\mathrm{P}\in\mathrm{H}_0$, on en déduit avec Q34 que $\mathrm{B}\in\mathrm{H}_{-1}$.

Écrivons maintenant $\mathrm{T} = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}^{(i)}$ ; alors $\mathrm{B} = \varphi(\mathrm{N}) + \sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\mathrm{T}^{(i)})$ et $\mathrm{B}-\mathrm{A} = \varphi(\mathrm{N})-\mathrm{N}+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\varphi(\mathrm{T}^{(i)})-\mathrm{T}^{(i)}\right)$.

$\mathrm{T}^{(i)}\in\Delta_i$ donc d'après Q37, $\varphi(\mathrm{T}^{(i)})-\mathrm{T}^{(i)}\in\mathrm{H}_{k+1}$.
D'après Q38, $\varphi(\mathrm{N})-\mathrm{N}-(\mathrm{NC}-\mathrm{CN})\in\mathrm{H}_{k+1}$ donc pour tout $i\leqslant k$, $\mathrm{B}^{(i)}-\mathrm{A}^{(i)} = (\mathrm{NC}-\mathrm{CN})^{(i)}$.

Or $\mathrm{NC}-\mathrm{CN}\in\Delta_k$ (d'après Q33) donc $\mathrm{B}^{(i)}-\mathrm{A}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\in[\![-1,k-1]\!] \\ \mathrm{NC}-\mathrm{CN} & \text{si } i=k \end{cases}$

### *III. C – L'opérateur de Sylvester*

**Q 40.** D'après Q32, $\operatorname{Ker}\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.

**Q 41.** $\mathrm{N}\in\Delta_{-1}$ donc d'après Q33, si $\mathrm{X}\in\Delta_{k+1}$ alors NX et XN sont dans $\Delta_k$, ainsi que $\mathcal{S}(\mathrm{X})$.
De même, $\mathrm{N}^\mathrm{T}\in\Delta_1$ donc $\mathrm{X}\in\Delta_k \implies \mathcal{S}^*(\mathrm{X})\in\Delta_{k+1}$.

**Q 42.** $\langle\mathcal{S}\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\rangle = \operatorname{tr}(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{Y}-\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y})$. Or $\operatorname{tr}(\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y}) = \operatorname{tr}(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y}\mathrm{N}^\mathrm{T})$ donc $\langle\mathcal{S}\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\rangle = \langle\mathrm{X}\mid\mathrm{N}^\mathrm{T}\mathrm{Y}-\mathrm{Y}\mathrm{N}^\mathrm{T}\rangle = \langle\mathrm{X}\mid\mathcal{S}^*\mathrm{Y}\rangle$.
En particulier, pour $\mathrm{X}\in\Delta_{k+1}$ et $\mathrm{Y}\in\Delta_k$ on a bien $\langle\mathcal{S}_{k+1}\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\rangle = \langle\mathrm{X}\mid\mathcal{S}_k^*\mathrm{Y}\rangle$.
Mais alors, $\mathrm{Y}\in\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) \implies \langle\mathcal{S}_{k+1}\mathrm{X}\mid\mathrm{Y}\rangle = 0$, ce qui montre que $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ et $\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$ sont orthogonaux, et donc en somme directe orthogonale.
$\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) = \operatorname{Ker}\mathcal{S}\cap\Delta_k = \operatorname{Vect}(\mathrm{D}_k)$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)) = 1$ et $\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)\subset\Delta_k$.
D'après Q41, $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})\subset\Delta_k$, et d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})) = \dim(\Delta_{k+1})-\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_{k+1}))$. On a $\dim(\Delta_{k+1}) = n-(k+1)$ et $\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_{k+1}) = \operatorname{Ker}\mathcal{S}\cap\Delta_{k+1} = \{0\}$ donc $\dim(\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})) = n-k-1$.

On a donc $\dim(\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1}))+\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)) = n-k = \dim(\Delta_k)$ donc $\Delta_k = \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$.

**Q 43.** D'après Q39, si on prend $\mathrm{C}\in\Delta_{k+1}$ et on pose $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n+\mathrm{C}$ alors A est semblable à $\mathrm{L} = \varphi(\mathrm{A})$ et pour tout $i\in[\![-1,k-1]\!]$, $\mathrm{L}^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}$. Il nous suffit donc de trouver $\mathrm{C}\in\Delta_{k+1}$ vérifiant en plus la condition $\mathrm{L}^{(k)}\in\operatorname{Vect}(\mathrm{D}_k)$.
La même question Q39 nous apprend que $\mathrm{L}^{(k)} = \mathrm{A}^{(k)}+\mathcal{S}_{k+1}(\mathrm{C})$, et on constate alors qu'il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à $\mathrm{A}^{(k)}$ : on décompose $\mathrm{A}^{(k)}$ suivant la somme directe obtenue : $\mathrm{A}^{(k)} = \mathcal{S}_{k+1}(\mathrm{X})+\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{X}\in\Delta_{k+1}$ et $\mathrm{Y}\in\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) = \operatorname{Vect}(\mathrm{D}_k)$ et de poser $\mathrm{C} = -\mathrm{X}$ pour que $\mathrm{A}^{(k)}+\mathcal{S}_{k+1}(\mathrm{C}) = \mathrm{Y}\in\operatorname{Vect}(\mathrm{D}_k)$, autrement dit pour que $\mathrm{L}^{(k)}\in\operatorname{Vect}(\mathrm{D}_k)$.

**Q 44.** Soit $\mathrm{A} = \mathrm{C}(a_0,\dots,a_{n-1})$ une matrice cyclique : on observe qu'elle s'écrit $\mathrm{A} = \mathrm{N}+\mathrm{T}$, où T est triangulaire supérieure. D'après la question précédente avec $k=0$, elle est semblable à une matrice $\mathrm{L}_0$ avec $\mathrm{L}_0\in\mathrm{H}_{-1}$, $\mathrm{L}_0^{(-1)} = \mathrm{A}^{(-1)} = \mathrm{D}_{-1}$ et $\mathrm{L}_0^{(0)} = t_0\mathrm{D}_0$ avec $t_0\in\mathbb{R}$. On observe qu'on peut écrire $\mathrm{L}_0 = \mathrm{N}+\mathrm{T}_0$ où $\mathrm{T}_0$ est triangulaire supérieure, à diagonale constante.
On ré-applique la question précédente à $\mathrm{L}_0$ mais cette fois avec $k=1$ : $\mathrm{L}_0$ est semblable à une matrice $\mathrm{L}_1$ avec $\mathrm{L}_1\in\mathrm{H}_{-1}$, $\mathrm{L}_1^{(-1)} = \mathrm{L}_0^{(-1)} = \mathrm{D}_{-1}$, $\mathrm{L}_1^{(0)} = \mathrm{L}_0^{(0)} = t_0\mathrm{D}_0$ et $\mathrm{L}_1^{(1)} = t_1\mathrm{D}_1$.
En réitérant ce processus on obtient *in fine* une matrice de Toeplitz $\mathrm{L}_{n-1} = \mathrm{T}(0,\dots,1,t_0,\dots,t_{n-1})$ semblable à la matrice A.