Matrice de covariance (Centrale PC 2022 – extrait)

Durée : libre

Notations Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On utilisera les notations matricielles classiques :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;
- 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;
- $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1,\dots,a_n$ dans cet ordre ;
- A^{T} désigne la transposée de la matrice A ;
- $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ désigne le spectre réel de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.
Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $\langle \mathrm{U} \mid \mathrm{V}\rangle = \mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}$.
On note $\|\mathrm{U}\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $p \in]0,1[$, il existe une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes définies sur Ω.
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, on note $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ respectivement l'espérance de X, la variance de X et la covariance de X et Y, lorsqu'elles sont définies.
On rappelle la formule

$$\mathrm{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathbb{E}\Big((\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathbb{E}(\mathrm{Y}))\Big) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$$

Définition. — *Une matrice* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite* orthodiagonalisable *s'il existe une matrice diagonale* D *et une matrice orthogonale* P *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$.

Orthodiagonaliser A revient à déterminer un couple de telles matrices (D,P).

I Matrice de covariance

Dans la suite du problème, on considère n variables aléatoires discrètes $\mathrm{Y}_1,\dots,\mathrm{Y}_n$ définies sur $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles et on définit la fonction Y de Ω dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{Y}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_n(\omega) \end{pmatrix}$$

Un tel vecteur aléatoire est dit *constant* si la fonction Y est constante.
Si chacune des variables aléatoires discrètes Y_i admet une espérance finie, on définit le vecteur espérance de Y en posant

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) \end{pmatrix}$$

Si toutes les covariances existent, la *matrice de covariance* de Y est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée Σ_{Y} de terme général $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j)$.

La *variance totale* de Y est définie par $\mathbb{V}_{\mathrm{T}}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{Y}_i)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ et Σ_{Y} sont bien définies.

I. A – On admet que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On admet aussi que $(\mathrm{Y}-\mathbb{E}(\mathrm{Y}))(\mathrm{Y}-\mathbb{E}(\mathrm{Y}))^{\mathrm{T}}$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'espérance, par définition, est également calculée terme à terme.

Q 1. Vérifier que Σ_Y est une matrice symétrique, que

$$\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T\Big)$$

et que, si U est un vecteur constant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y.$$

Q 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $Z = MY$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que Z admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que Z admet une matrice de covariance Σ_Z et que

$$\Sigma_Z = M\Sigma_Y M^T$$

I. B – Propriété des valeurs propres

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y.

On définit la variable aléatoire discrète $X = P^T Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Q 3. Démontrer que Σ_X est une matrice diagonale.

Q 4. En déduire que les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives.

Q 5. Démontrer que la variance totale de X est égale à celle de Y.

I. C – Étude de la réciproque

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont tous positifs.

Q 6. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

Q 7. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A$.

I. D – Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $X = U^T Y$.

Q 8. Montrer que X admet une variance et que $\mathbb{V}(X) = U^T \Sigma_Y U$.

I. E – Image de Σ_Y

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que $\mathbb{P}\Big(Y - \mathbb{E}(Y) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_Y\Big) = 1$.
On note r le rang de la matrice de covariance de Y.

Q 9. Traiter le cas où $r = n$.

On suppose maintenant $r < n$.

Q 10. Démontrer que le noyau et l'image de Σ_Y sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note $d = \dim \mathrm{Ker}\,\Sigma_Y$ et on considère une base orthonormée $(V_1, \dots, V_d)$ de $\mathrm{Ker}\,\Sigma_Y$.

Q 11. Démontrer que $\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \mathbb{V}\Big(V_j^T(Y - \mathbb{E}(Y))\Big) = 0$.

Q 12. En déduire que $\mathbb{P}\Big(V_j^T(Y - \mathbb{E}(Y)) = 0\Big) = 1$.

Q 13. Conclure.